Korrekturen & Nachträge

[im veröffentlichenten Skript bereits korrigiert bzw. ergänzt]

K4, Universelle Eigenschaften

10a. Beispiel

Der (kategorielle) Kern eines Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R ist ein Objekt $\underline{\ker(f)}$ in Mod_R zusammen mit einem Morphismus $\underline{\ker(f)} \xrightarrow{i} M$ derart, dass $f \circ i = 0$ und die folgende UE erfüllt ist:

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, dashed, "\exists!\hat{g}"'] \arrow[d, "\forall g"] \arrow[dr, bend left, "0"] & \\
\underline{\ker(f)} \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

10b. Beispiel

Der (kategorielle) Kokern eines Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R ist ein Objekt $\underline{\operatorname{coker} f}$ in Mod_R zusammen mit einem Morphismus $N \xrightarrow[p]{} \underline{\operatorname{coker} f}$ derart, dass $p \circ f = 0$ und die folgende UE erfüllt ist:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, bend right, "0"'] & N \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\forall g"] & \underline{\operatorname{coker} f} \arrow[dl, dashed, "\exists!\hat{g}"] \\
 & T &
\end{tikzcd}$$

K5, Limiten & Kolimiten

Bsp. 12 (e)

Ein Kern von $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R
ist ein Limes von $M \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} N$ (vgl. K4, Bsp. 10a).

Bsp. 14 (e)

Ein Kokern von $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R
ist ein Kolimes von $M \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} N$ (vgl. K4, Bsp. 10b).

K6, Adjunktionen

Beispiel 3 (d)

R kommutativer Ring, $M \in \mathrm{ob}\, \mathrm{Mod}_R$

Adjunktion $\quad \mathrm{Mod}_R \underset{\mathrm{Hom}_R(M,-)}{\overset{-\otimes_R M}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}_R$

allgemeiner, für beliebigen Ring R:

$M \in \mathrm{ob}\, {}_R\mathrm{Mod}$ liefert Adjunktion $\quad \mathrm{Mod}_R \underset{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,-)}{\overset{-\otimes_R M}{\rightleftarrows}} \mathrm{Ab}$

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,A)$ ist Rechts-R-Modul via $(f\cdot r)(m) := f(r\cdot m)$ für $r \in R$, $m \in M$, $f: M \longrightarrow A$

$A \otimes_{\mathbb{Z}} M$ ist Rechts-R-Modul: M3, Satz 12

$M \in \mathrm{ob}\, \mathrm{Mod}_R$ liefert Adjunktion $\quad \mathrm{Ab} \underset{\mathrm{Hom}_R(M,-)}{\overset{-\otimes_{\mathbb{Z}} M}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}_R$

K7 Abelsche Kategorien

4. Def.: Kern und Kokern eines Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ lassen sich in jeder additiven Kategorie genauso wie in Mod_R definieren als Limes bzw. Kolimes von $\quad X \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} Y$

– vgl. K4, Bsp. 10 & K5, Bsp. 12 (e) & 14 (e)).

14. Übung: $\quad F$ linksexakt $\iff$ F erhält Kerne

F rechtsexakt $\iff$ F erhält Kokerne

16. Satz:

Rechtsadjungierte additive Funktoren sind linksexakt.
Linksadjungierte additive Funktoren sind rechtsexakt.

Beweis: Übung 14 & RAPL (K6, Satz 12). $\square$

M 5 Projektive, injektive & flache Moduln

1. Satz.: Für jede abelsche Kategorie sind

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,-) : \mathcal{A} \longrightarrow Ab$$

und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,X) : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow Ab$ linksexakt.

Kurzbeweis zu $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,-)$ für $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}_R$:

$$Ab \underset{\mathrm{Hom}_R(M,-)}{\overset{-\otimes_{\mathbb{Z}} M}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}_R \qquad (K6,\ \text{Bsp. } 3(d))$$

und Rechtsadjungierte sind linksexakt (K7, Satz 16). $\square$