

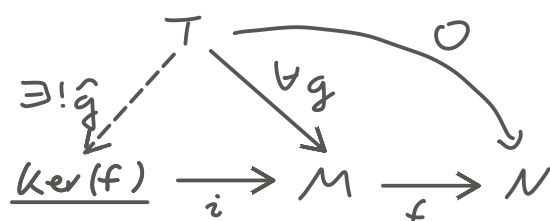
# Korrekturen & Nachträge

[im veröffentlichten Skript bereits korrigiert bzw. ergänzt]

## K4, Universelle Eigenschaften

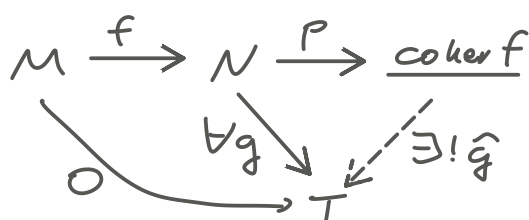
### 10a. Beispiel

Der (kategorielle) Kern eines Morphismus  $M \xrightarrow{f} N$  in  $\text{Mod}_R$  ist ein Objekt  $\underline{\ker(f)}$  in  $\text{Mod}_R$  zusammen mit einem Morphismus  $\underline{\ker(f)} \xrightarrow{i} M$  derart, dass  $f \circ i = 0$  und die folgende  $\mathcal{U}$  erfüllt ist:



### 10b. Beispiel

Der (kategorielle) Kokern eines Morphismus  $M \xrightarrow{f} N$  in  $\text{Mod}_R$  ist ein Objekt  $\underline{\text{coker } f}$  in  $\text{Mod}_R$  zusammen mit einem Morphismus  $N \xrightarrow{p} \underline{\text{coker } f}$  derart, dass  $p \circ f = 0$  und die folgende  $\mathcal{U}$  erfüllt ist:



## K5, Limiten & Kolimiten

### Bsp. 12 (e)

Ein Kern von  $M \xrightarrow{f} N$  in  $\text{Mod}_R$  ist ein Limes von  $M \xrightarrow{f} N$  (vgl. K4, Bsp. 10a).

### Bsp. 14 (e)

Ein Kokern von  $M \xrightarrow{f} N$  in  $\text{Mod}_R$  ist ein Kolimes von  $M \xrightarrow{f} N$  (vgl. K4, Bsp. 10b).

## K6, Adjunktionen

### Beispiel 3 (a)

$R$  kommutativer Ring,  $M \in \text{ob Mod}_R$

$$\text{Adjunktion} \quad \text{Mod}_R \begin{array}{c} \xrightarrow{- \otimes_R M} \\ \xleftarrow{\text{Hom}_R(M, -)} \end{array} \text{Mod}_R$$

allgemeiner, für beliebigen Ring  $R$ :

$$M \in \text{ob}_R \text{Mod} \text{ liefert Adjunktion} \quad \text{Mod}_R \begin{array}{c} \xrightarrow{- \otimes_R M} \\ \xleftarrow{\text{Hom}_Z(M, -)} \end{array} \text{Ab}$$

$\uparrow$   
 $\text{Hom}_Z(M, A)$  ist Rechts- $R$ -Modul via  
 $(f \cdot r)(m) := f(r \cdot m)$  für  $r \in R, m \in M,$   
 $f: M \rightarrow A$

$$M \in \text{ob Mod}_R \text{ liefert Adjunktion} \quad \text{Ab} \begin{array}{c} \xrightarrow{- \otimes_Z M} \\ \xleftarrow{\text{Hom}_R(M, -)} \end{array} \text{Mod}_R$$

$A \otimes_Z M$  ist Rechts- $R$ -Modul:  
 $M3, \text{ Satz } 12$   
 $\downarrow$

## K7 Abelsche Kategorien

4. Def.: Kern und Kokern eines Morphismus  $f: X \rightarrow Y$

(lassen sich in jeder additiven Kategorie genauso wie in  $\text{Mod}_R$  definieren als Limes bzw.

$$\text{Kolim} \text{ von } X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{0} \end{array} Y$$

- vgl. K4, Bsp. 10 & K5, Bsp. 12 (e) & 14 (e)).

14. Übung:  $F$  linksexakt  $\Leftrightarrow F$  erhält Kerne

$F$  rechtsexakt  $\Leftrightarrow F$  erhält Kokerne

## 16. Satz:

Rechtsadjungierte additive Funktoren sind links-exakt.  
Linksadjungierte additive Funktoren sind rechts-exakt.

Beweis: Übung 14 & RAPL (K6, Satz 12). □

## M5 Projektive, injektive & flache Moduln

1. Satz.: Für jede abelsche Kategorie sind

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} &\longrightarrow \text{Ab} \\ \text{und } \text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, X) : \mathcal{A}^{\text{op}} &\longrightarrow \text{Ab} \quad \text{links-exakt.} \end{aligned}$$

Kurzbeweis zu  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$  für  $\mathcal{A} = \text{Mod}_R$ :

$$\text{Ab} \begin{array}{c} \xrightarrow{- \otimes_{\mathbb{Z}} M} \\ \xleftarrow{\text{Hom}_R(M, -)} \end{array} \text{Mod}_R \quad (\text{K6, Bsp. 3(d)})$$

und Rechtsadjungierte sind links-exakt (K7, Satz 16). □