K7: Abelsche Kategorien

Beispiele für abelsche Kategorien:

Ab $\quad$ Mod_R $\quad$ $Kom(Mod_R)$

Prägarben von $\mathcal{O}$-Moduln auf einem top. Raum $\quad$ Garben von $\mathcal{O}$-Moduln auf einem top. Raum

Beispiele für nicht-abelsche Kategorien:

Groups $\quad$ Sets $\quad$ Top $\quad$ usw. usf.

1. Def.: Eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist *additiv*, falls gilt:

(1) Die Morphismenmengen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ bilden abelsche Gruppen $\quad (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y), +, 0)$, und diese Gruppenstruktur ist verträglich mit Komposition:

$$(f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h$$
$$f\circ(h+i) = f\circ h + f\circ i$$

für $X \overset{h}{\underset{i}{\rightrightarrows}} Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Z$

(2) Es gibt ein Nullobjekt 0 in $\mathcal{C}$ (d.h.: 0 ist Anfangsobjekt und Endobjekt).

(3) Binäre Produkte existieren in $\mathcal{C}$.

Ein Funktor $F\colon \mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ zwischen additiven Kat. ist *additiv*, falls die Abbildungen

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$$

für alle X und Y in $\mathcal{C}$ Gruppenhomomorphismen sind.

2. Bemerkung: Diese Def. ist minimalistisch – lässt sich leicht in Beispielen prüfen.

etwa:

- Ab, Mod_R ✓
- $Kom(Mod_R)$:

$$\mathrm{Hom}_{Kom(Mod_R)}(M_\bullet, N_\bullet) \subseteq \underbrace{\prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(M_i, N_i)}_{\text{Untergruppe}}$$

0 = Nullkomplex

$M \oplus N$: $\quad (M\oplus N)_i := M_i \oplus N_i$

$$d_i^{M\oplus N} = \begin{pmatrix} d_i^M & 0 \\ 0 & d_i^N \end{pmatrix}$$

andererseits:

- Sets, Top nicht additiv ($\emptyset \not\cong *$)
- Groups nicht additiv ($G_1 \times G_2 \not\cong G_1 * G_2$, und es gilt:)

3. Satz (Konsequenzen aus Def.)

Sei $\mathcal{C}$ additive Kategorie.

(a) In $\mathcal{C}$ existieren auch binäre Koprodukte, und diese stimmen in folgendem Sinne mit den Produkten überein:

Ist $X \xleftarrow[\pi_X]{} X \times Y \xrightarrow[\pi_Y]{} Y$ ein Produkt von X & Y in $\mathcal{C}$, so ist

$$X \xrightarrow{\binom{\mathrm{id}}{0}} X \times Y \xleftarrow{\binom{0}{\mathrm{id}}} Y$$

Ist $X \xrightarrow{\iota_X} X \amalg Y \xleftarrow{\iota_Y} Y$ ein Koprodukt von X & Y in $\mathcal{C}$, so ist

$$X \xleftarrow[(\mathrm{id}\ 0)]{} X \amalg Y \xrightarrow[(0\ \mathrm{id})]{} Y$$

Wir sprechen daher von **Biprodukten** und schreiben $X \oplus Y$.

(b) Für $f : X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{C}$ gilt: $0 \circ f = f = f \circ 0$

Es ist $f = 0$ g.d.w. f durch das Nullobjekt faktorisiert

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \\ & 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(c) Additive Funktoren erhalten das Nullobjekt und (Bi) Produkte, also $F(0) \cong 0$

und insbes. $F(X \oplus Y) \cong FX \oplus FY$.

Beweisfragmente:

(b) $0 \circ f = (0+0) \circ f = 0 \circ f + 0 \circ f$, also $0 \circ f = 0$

(üblicher Trick)

Seien $e : X \xrightarrow{0} 0$ und $a : 0 \xrightarrow{0} Y$ die eindeutigen Morphismen. Wegen Eindeutigkeit folgt: $e = 0$ und $a = 0$.

(c) Nutze: $X \cong 0 \iff \mathrm{id}_X = 0$

$\square$

4. Def.: Kern und Kokern eines Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ lassen sich in jeder additiven Kategorie genauso wie in Mod_R definieren als Limes bzw. Kolimes von $X \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} Y$

– vgl. K4, Bsp. 10 & K5, Bsp. 12 (e) & 14 (e)).

Ein Bild von f ($\mathrm{im}\, f$) ist ein Kern eines Kokerns von f.

Ein Kobild von f ($\mathrm{coim}\, f$) ist ein Kokern eines Kerns von f.

$$\text{„}\ \mathrm{im}\, f = \ker(\mathrm{coker}\, f)$$

$$\mathrm{coim}\, f = \mathrm{coker}(\ker f)\ \text{“}$$

5. Notiz:

(a) Für Morphismus $i: M \longrightarrow N$ in additiver Kategorie sind äquivalent:

① i Mono

② $(i \circ f = 0 \implies f = 0)$

③ $\ker(i) \cong 0$

(b) Für Morphismus $q: M \longrightarrow N$ in additiver Kategorie sind äquivalent:

① q Epi

② $(f \circ q = 0 \implies f = 0)$

③ $\operatorname{coker}(q) \cong 0$

Beweisfragmente:

(1 ⟺ 2) $i \circ f_1 = i \circ f_2 \iff i \circ (f_1 - f_2) = 0$

— vgl. M1, Notiz 9 oder Blatt 6, Aufgabe 5 (ii ⟺ iii)

(2 ⟹ 3): Nullobjekt hat die UE:

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, dashed, "\exists!"'] \arrow[dr, "\forall", "{= 0 \text{ da } i \text{ Mono}}"'] \arrow[drrr, bend left, "0"] & & & \\ 0 \arrow[rr] & & M \arrow[rr, "i"'] & & N \end{tikzcd}$$

(2 ⟸ 3) Sei $i \circ f = 0$.

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, dashed, "\exists"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[drrr, bend left, "0"] & & & \\ 0 \arrow[rr] & & M \arrow[rr, "i"'] & & N \end{tikzcd}$$

Da das Nullobjekt die UE von $\ker(i)$ hat, faktorisiert f durch das Nullobjekt. Also $f = 0$. $\square$

6. Notiz: In jeder additiven Kategorie sind
Kerne Monomorphismen,
Kokerne Epimorphismen.
(siehe Blatt 6, Aufgabe 5 ($i \Rightarrow iii$))

7. Def.: Eine *abelsche Kategorie* ist eine additive Kategorie, in der gilt:

(4) Jeder Morphismus besitzt einen Kern und einen Kokern.

(5) Für jeden Monomorphismus i gilt:
i ist ein Bild von i (also insbes. ein Kern),
für jeden Epimorphismus q gilt:
q ist ein Kobild von q (also insbes. ein Kokern)

8. Satz:

(a) Mod_R ist abelsch (für jeden Ring R)

(b) $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ – analog definiert wie $\mathrm{Kom}(\mathrm{Mod}_R)$ – ist abelsch für jede abelsche Kategorie $\mathcal{A}$.

Beweisfragmente:

a: 4: ✓ (K4, Beispiel 10)

5: Sei i Monomorphismus.

$$\begin{tikzcd}
& T \arrow[dl, dashed, "\exists\,\checkmark"'] \arrow[d] \arrow[dr, bend left, "0"] & \\
M \arrow[r, hook, "i"'] & N \arrow[r, two heads] & N/M
\end{tikzcd}$$

ein Kokern von i

Sei q Epimorphismus.

ein kategorieller Kern von q

$$\begin{tikzcd}
\ker(q) \arrow[r, hook] \arrow[dr, bend right, "0"'] & M \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[dl, dashed, "\exists!"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

$N \ni q(m) \mapsto f(m) \in T$ (und das ist wohldef.)

b:

4: Def. Kern & Kokern gradweise – siehe Blatt 11, Aufg. 2.

[...]

5: [...] $\square$

9. Satz: Bildfaktorisierung

In einer abelschen Kategorie stimmen Ziel von $\mathrm{coim}(f)$ und Quelle von $\mathrm{im}(f)$ (bis auf Isomorphie) überein und es ist $f = \mathrm{im}(f) \circ \mathrm{coim}(f)$.

$$\begin{tikzcd}
\sim \arrow[r, "\ker(f)"] & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{coim}(f)"'] & & Y \arrow[r, "\mathrm{coker}(f)"] & \sim \\
& & \bullet \arrow[ur, "\mathrm{im}(f)"'] & &
\end{tikzcd}$$

„$\bullet \cong X/_{\ker f} \cong \mathrm{im}(f)$"

Beweis als Übung.

Exaktheit & Einbettungssatz

$\boxed{\mathcal{A} \text{ abelsche Kategorie}}$

10. Defi: Eine Sequenz von Morphismen

$$\dots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \dots$$

in $\mathcal{A}$ ist **exakt**, falls „$\mathrm{im}(f) = \ker(g)$", also falls ein Bild von f ein Kern von g ist, an jeder Stelle der Sequenz.

Eine **kurze exakte Sequenz** ist eine Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

Sie **spaltet**, wenn es einen Morphismus

$$Y \xleftarrow{s} Z$$

gibt mit $g \circ s = \mathrm{id}_Z$.

11. Satz: Wie in Mod_R gilt auch in beliebiger abelsche Kategorie:

$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} Y$ exakt $\iff$ i Mono

$Y \xrightarrow{q} Z \longrightarrow 0$ exakt $\iff$ q Epi

$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ exakt $\iff$ f ist ein Kern von g

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ exakt $\iff$ g ist ein Kokern von f

Beweis als Übung

12. Def.: $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abelsch

Ein additiver Funktor $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ heißt:

- **linksexakt**, falls für jede exakte Sequenz
$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$
auch
$$0 \longrightarrow FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \qquad \text{exakt ist.}$$

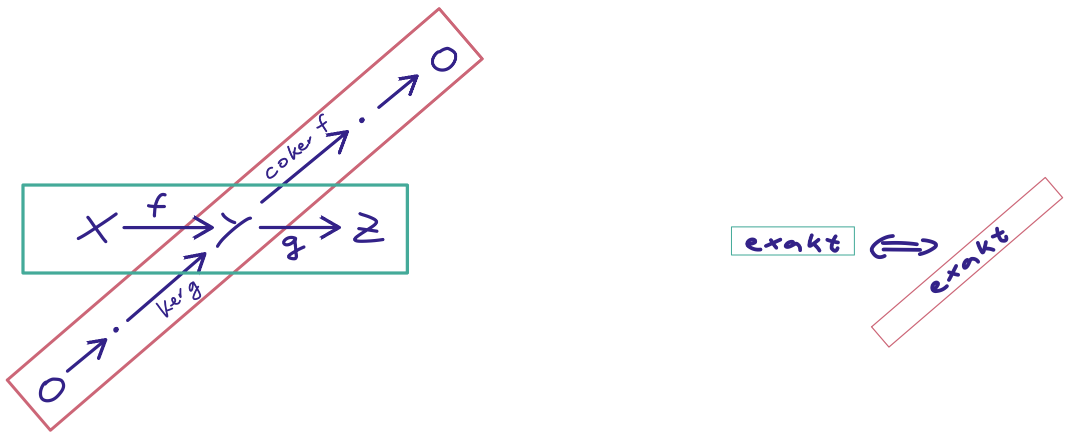
- **rechtsexakt**, falls für jede exakte Sequenz
$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$
auch
$$FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \longrightarrow 0 \qquad \text{exakt ist.}$$

- **exakt**, falls er Exaktheit beliebiger Sequenzen erhält

13. Übung: F linksexakt $\iff$ F erhält Kerne
F rechtsexakt $\iff$ F erhält Kokerne

14. Übung: F exakt $\iff$ F ist links- und rechtsexakt.

(Idee:



)

15. Satz:

Rechtsadjungierte additive Funktoren sind linksexakt.
Linksadjungierte additive Funktoren sind rechtsexakt.

Beweis: Übung 14 & RAPL (K6, Satz 12). $\square$

16. Übung: Ist $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ exakt und volltreu, so gilt für Komplexe $M_\bullet$ in $\mathcal{A}$:

$$M_\bullet \text{ exakt} \iff F(M_\bullet) \text{ exakt}$$

17. Einbettungssatz:
Zu jeder kleinen abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ gibt es einen Ring R und einen exakten volltreuen Funktor

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Mod}_R$$

$\square$

18. Korollar: Fünfer-Lemma und Schlangenlemma (M4, Kor. 6) gelten in beliebigen abelschen Kategorien.
(Wende Einbettungssatz und Übung 16 an auf kleine Unterkategorie, die das Diagramm enthält.)

19. Korollar: Eine k.e.S.

$$0 \to X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \to 0$$

in einer abelschen Kategorie spaltet (Def. 10) g.d.w. sie isomorph ist zur Sequenz

$$0 \to X \xrightarrow[\binom{\mathrm{id}}{0}]{} X \oplus Z \xrightarrow[(0\ \mathrm{id})]{} Z \to 0,$$

wenn es also ein kommutatives Diagramm gibt der Form:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\binom{\mathrm{id}}{0}"'] & X \oplus Z \arrow[r, "(0\ \mathrm{id})"'] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(vgl. Beweis zu M2, Satz 6)