K6: Adjunktionen

1. Def.: Zwei Funktoren $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ bilden eine Adjunktion, falls es natürliche Bijektion der Form

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y)$$

gibt.

F heißt dann linksadjungiert zu G,
G heißt rechtsadjungiert zu F,
geschrieben $F \dashv G$.

„Natürlich" bedeutet hier, dass für beliebige Morphismen $f: X' \longrightarrow X$ in $\mathcal{C}$
und $g: Y \longrightarrow Y'$ in $\mathcal{D}$
das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
h \in \arrow[d, mapsto] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f^*"', "(Gg)_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \arrow[d, "(Ff)^*"', "g_*"] & \ni \tilde{h} \arrow[d, mapsto] \\
Gg \circ h \circ f \in & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', GY') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX', Y') & \ni g \circ \tilde{h} \circ Ff
\end{tikzcd}$$

Aus der Definition erhalten wir für jedes X in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $\mu_X: X \longrightarrow GFX$ mit

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GFX) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FX), \\
\mu_X \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[r, mapsto] & \mathrm{id}_{FX} \arrow[u, phantom, sloped, "\in"]
\end{tikzcd}$$

genauso für jedes Y aus $\mathcal{D}$ ein $\eta_Y: FGY \longrightarrow Y$,
sodass:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GY, GY) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FGY, Y) \\
\mathrm{id}_{GY} \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[r, mapsto] & \eta_Y
\end{tikzcd}$$

2. Lemma & Def.: Wir erhalten so natürliche Trafos $\mu: \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \rightsquigarrow GF$, die Einheit der Adj., und $\eta: FG \rightsquigarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, die Koeinheit.

Beweis zu μ:

Für $f: X \longrightarrow X'$ in $\mathcal{C}$ ist zu zeigen:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "f"'] & GFX \arrow[d, "GF(f)"] \\
X' \arrow[r, "\mu_{X'}"'] & GFX'
\end{tikzcd}$$

$$\mu_{X'} \circ f = GF(f) \circ \mu_X$$

Das folgt aus:

$$\begin{tikzcd}
\mu_X \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & \mathrm{id} \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GFX) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(GFf)_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FX) \arrow[d, "(Ff)_*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GFX') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FX') \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', GFX') \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "f^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX', FX') \arrow[u, "(Ff)^*"'] \\
\mu_{X'} \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & \mathrm{id}_{FX'} \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"]
\end{tikzcd}$$

$GFf \circ \mu_X \mapsto Ff$

$\mu_{X'} \circ f \mapsto Ff$

$f = \mathrm{id}$"
„ $g = Ff$

$f = f$"
„ $g = \mathrm{id}$

$\square$

3. Beispiele

(a) freie Funktoren $\dashv$ vergessliche Funktoren

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sets} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathrm{Groups} \arrow[l, shift left, "U"]
\end{tikzcd} \qquad F(S) = \langle S \rangle$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(S, UG) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Groups}}(\langle S \rangle, G)$$

$$\underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(*, UG)}_{\cong\, UG} \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Groups}}(\mathbb{Z}, G)$$

Für eine Menge S ist $\mu_S : \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & UF(S) \\ s & \longmapsto & s \end{array}$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sets} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathrm{Ab} \arrow[l, shift left, "U"] \end{tikzcd}$$

$F(S) = \bigoplus_S \mathbb{Z}$

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(S, UA) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\bigoplus_S \mathbb{Z}, A)$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sets} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathrm{Mod}_R \arrow[l, shift left, "U"] \end{tikzcd}$$ – analog

(b)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Groups} \arrow[r, shift left, "(-)^{ab}"] & \mathrm{Ab} \arrow[l, hook', shift left, "I"] \end{tikzcd}$$

I: Inklusion

$G^{ab} :=$ Abelianisierung

$(= G/[G,G])$

↑ Kommutator-untergruppe

UE von $G \xrightarrow{(*)} G^{ab}$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(*)"] \arrow[dr, "\forall f"'] & G^{ab} \arrow[d, "\exists!"] \\ & A \end{tikzcd}$$

abelsch

Also $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(G^{ab}, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Groups}}(G, IA)$

Hier ist $\mu_G : G \longrightarrow IG^{ab}$ gerade die universelle Quotientenabb. $(*)$,

und $\eta_A : (IA)^{ab} \longrightarrow A$ ein Isomorphismus.

(c)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sets} \arrow[r, shift left=2, "\delta"] \arrow[r, shift right=2, "K"'] & \mathrm{Top} \arrow[l, "U"'] \end{tikzcd}$$

δ: diskrete Topologie

U: Vergiss

K: Klumpentopologie

$\delta \dashv U$: $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(S, UX) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\delta S, X)$

$U \dashv K$: $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(UX, S) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(X, KS)$

(a) Betrachte für eine feste Menge Y die Funktoren

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sets} \arrow[rr, "- \times Y"] & & \mathrm{Sets} \\
X \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, mapsto] & & X \times Y \arrow[d, "f \times \mathrm{id}_Y"] \\
X' \arrow[rr, mapsto] & & X' \times Y
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sets} & & \mathrm{Sets} \arrow[ll, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(Y,-)"']
\end{tikzcd}$$

Es ist $(- \times Y) \dashv \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(Y,-)$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(X, \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(Y, Z)) & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(X \times Y, Z) \\
f & \longmapsto & \big((x,y) \mapsto f(x)(y)\big) \\
\big(x \mapsto (y \mapsto g(x,y))\big) & \longleftarrow\!\shortmid & g
\end{array}$$

„Exponentialgesetz": $(Z^Y)^X \cong Z^{X \times Y}$

analog: R kommutativer Ring, $M \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Mod}_R$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}_R \arrow[rr, shift left, "- \otimes_R M"] & & \mathrm{Mod}_R \arrow[ll, shift left, "\mathrm{Hom}_R(M,-)"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(L, \mathrm{Hom}_R(M, N)) \arrow[dr, phantom, "\cong", "\text{wie in Sets}"'] & & \mathrm{Hom}_R(L \otimes_R M, N) \arrow[dl, phantom, "\cong"', "\text{UE von } \otimes_R"] \\
& \mathrm{Hom}_{R\text{-bilinear}}(L \times M, N) &
\end{tikzcd}$$

Alle diese Bijektionen sind natürlich (Übung).

allgemeiner, für beliebigen Ring R:

$M \in \mathrm{ob}\,_R\mathrm{Mod}$ liefert Adjunktion
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mod}_R \arrow[r, shift left, "- \otimes_R M"] & \mathrm{Ab} \arrow[l, shift left, "\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,-)"] \end{tikzcd}$$

↑
$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,A)$ ist Rechts-R-Modul via $(f\cdot r)(m) := f(r\cdot m)$ für $r \in R$, $m \in M$, $f: M \longrightarrow A$

$A \otimes_{\mathbb{Z}} M$ ist Rechts-R-Modul: M3, Satz 12
↓

$M \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Mod}_R$ liefert Adjunktion
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ab} \arrow[r, shift left, "- \otimes_{\mathbb{Z}} M"] & \mathrm{Mod}_R \arrow[l, shift left, "\mathrm{Hom}_R(M,-)"] \end{tikzcd}$$

(e) Abbildung von Mengen $X \xrightarrow{f} Y$ definiert Funktoren

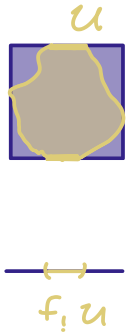
halbgeordnete Menge, aufgefasst als Kategorie ⟶
$$\begin{tikzcd} (\mathcal{P}(X), \subseteq) \arrow[r, shift left=2, "f"] \arrow[r, shift right=2, "f_!"'] & (\mathcal{P}(Y), \subseteq) \arrow[l, "f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$f \dashv f^{-1}$: Für $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ gilt:
$$U \subseteq f^{-1}V \iff fU \subseteq V$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(X)}(U, f^{-1}V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(Y)}(fU, V)$$

Für $f_!\, U :=$ größte Teilmenge $V \subseteq Y$ mit $f^{-1}V \subseteq U$
$$= \bigcup_{V:\, f^{-1}V \subseteq U} V$$

gilt:
$$f^{-1} \dashv f_! : \quad f^{-1}V \subseteq U \iff V \subseteq f_* U$$

z.B.
$$\begin{tikzcd} X = [0,1] \times [0,1] \arrow[d] & (x,y) \arrow[d, mapsto] \\ Y = [0,1] & x \end{tikzcd}$$



4. Satz: Eindeutigkeit

Seien Funktoren $\mathcal{C} \underset{U,V}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ gegeben.

Ist $F \dashv U$ und $F \dashv V$, so ist $U \cong V$.

M.a.W.: Rechtsadjungierte Funktoren sind eindeutig bis auf natürliche Isomorphie.

Analog: Linksadjungierte Funktoren sind eindeutig.

Beweisskizze für lokal kleine Kategorien:

Für $X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ und $Y \in \mathrm{ob}\,\mathcal{D}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, UY) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, VY),$$

also

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, UY) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, VY),$$ natürlich in X & Y.

Für festes Y erhalten wir also einen natürlichen Isomorphismus

$$\underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, UY)}_{\mathcal{Y}(UY)} \cong \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, VY)}_{\mathcal{Y}(VY)}.$$

Also ist $UY \cong VY$ nach Yoneda-Lemma – siehe K4, Anmerkung 5a.

Prüfe, dass dieser Isomorphismus natürlich ist in Y.

$\square$

5. Lemma: Sei $F \dashv G$, $\mu : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \rightsquigarrow GF$ Einheit,
$\eta : FG \rightsquigarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ Koeinheit.
Die Adjunktion kann explizit beschrieben werden wie folgt:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) \rightleftarrows \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & GY \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & \left(FX \right. \arrow[r, "Ff"] & \left. FGY \right) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ & & & Y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \left(X \right. \arrow[d, "\mu_X"'] & & & \\ GFX \arrow[r, "Gg"] & \left. GY \right) & \arrow[l, phantom, "\longmapsfrom"] & FX \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Beweis:

$(\longrightarrow)$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{id} \arrow[rrr, mapsto, bend left] \arrow[d, mapsto] \arrow[r, phantom, "\in"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GY, GY) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FGY, Y) \arrow[d, "(Ff)^*"] & \eta \arrow[d, mapsto] \arrow[l, phantom, "\ni"] \\ f \arrow[r, phantom, "\in"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) & \eta \circ Ff \arrow[l, phantom, "\ni"] \end{tikzcd}$$

$(\longleftarrow)$ analog / siehe Beweis zu Lemma 2. $\square$

6. Lemma & Def.: Die Einheit μ und Koeinheit η einer Adjunktion $F \dashv G$ erfüllen die **Dreiecksgleichungen:**
Die Dreiecke

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, squiggly, "F\mu"] \arrow[dr, squiggly, "\mathrm{id}_F"'] & FGF \arrow[d, squiggly, "\eta_F"] \\ & F \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} G \arrow[r, squiggly, "\mu_G"] \arrow[dr, squiggly, "\mathrm{id}_G"'] & GFG \arrow[d, squiggly, "G\eta"] \\ & G \end{tikzcd}$$

kommutieren.

Beweis:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GY, GY) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FGY, Y) \\ G\eta_Y \circ \mu_{GY} \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & \eta_Y \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \arrow[l, mapsto, "\text{Lemma 5}"'] \\ \mathrm{id}_{GY} \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \arrow[ur, mapsto, "\text{Def. / Lemma 5}"'] & \end{tikzcd}$$

$\square$

7. Satz: Für zwei Funktoren $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ gilt genau dann $F \dashv G$, wenn es natürliche Transform.

$$\mu : \mathrm{Id}_\mathcal{C} \rightsquigarrow GF$$

und $$\eta : FG \rightsquigarrow \mathrm{Id}_\mathcal{D}$$

gibt, die die Dreiecksgleichungen erfüllen.

Beweis:

(⇓) Lemma 6

(⇑) Definiere Adjunktion wie in Lemma 5:

$$\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, GY) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(FX, Y)$$

$$X \xrightarrow{f} GY \quad \longmapsto \quad \left(\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "Ff"] & FGY \arrow[d, "\eta_Y"] \\ & Y \end{tikzcd} \right)$$

$$\left(\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\mu_X"'] & \\ GFX \arrow[r, "Gg"] & GY \end{tikzcd} \right) \quad \longleftarrow\!\shortmid \quad FX \xrightarrow[g]{} Y$$

$(\circlearrowleft = \mathrm{id})$: $\varphi\psi(X \xrightarrow{f} GY) =$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu_X"'] \arrow[dr, phantom, "\text{Natürlichkeit von } \mu"] & GY \arrow[d, "\mu_{GY}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{GY}"] \arrow[dr, phantom, "\triangle"'] & \\
GFX \arrow[r, "GFf"'] & GFGY \arrow[r, "G\eta_Y"'] & GY
\end{tikzcd}$$

$(\hookrightarrow = \mathrm{id})$: ähnlich

Bijektion natürlich:

$$\begin{tikzcd}
h \arrow[rrr, mapsto] \arrow[dddd, mapsto] & & & \eta \circ Fh \arrow[ddd, mapsto] \\
& \mathcal{C}(X, GY) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f^*"', "(Gg)_*"] & \mathcal{D}(FX, Y) \arrow[d, "(Ff)^*"', "g_*"] & \\
& \mathcal{C}(X', GY') \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{D}(FX', Y') & \\
& & & g \circ \eta \circ Fh \circ Ff \\
Gg \circ h \circ f \arrow[rrr, mapsto] & & & \eta \circ FGg \circ Fh \circ Ff
\end{tikzcd}$$

N.z.z.: $g \circ \eta = \eta \circ FGg$ – Das ist Natürlichkeit von η. $\square$

8. Satz: Sei $F \dashv G$ mit Einheit $\mu: \mathrm{Id} \rightsquigarrow GF$ und Koeinheit $\eta: FG \rightsquigarrow \mathrm{Id}$.

F ist genau dann volltreu, wenn μ ein Isomorphismus ist.

G ist genau dann volltreu, wenn η ein Isomorphismus ist.

Beweis: viel länger als ich dachte, daher hier nur angedeutet.

(η_Y Epi für jedes Y* $\Rightarrow$ G treu)

Ist $Gg_1 = Gg_2$, so betrachte

$$\begin{tikzcd}
FGY \arrow[r, "FGg_i"] \arrow[d, "\eta_Y"'] & FGY' \arrow[d, "\eta_{Y'}"] \\
Y \arrow[r, "g_i"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

und folgere $g_1 = g_2$.

(η Iso $\Rightarrow$ G außerdem voll)

Δ-Gleichung zeigt: μ_{GY} Iso mit Inversen $G\eta_Y$.

Betrachte zu gegebenem $f: GY \longrightarrow GY'$ nun

$$\begin{tikzcd}
GFGY \arrow[r, "G(Ff)"] & GFGY' \\
GY \arrow[u, "G(\eta_Y^{-1}) = \mu_{GY}", "\cong"'] \arrow[r, "f"'] & GY' \arrow[u, "\mu_{GY'} = G(\eta_{Y'}^{-1})"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

(G treu $\Rightarrow$ η_Y Epi für jedes Y) Ist $g_1\eta = g_2\eta$, so auch

$\eta \circ FGg_1 = \eta \circ FGg_2$

(siehe Diagramm in $\Leftarrow$),

also unter Adjunktion $Gg_1 = Gg_2$,

also, da G treu, $g_1 = g_2$.

(G volltreu $\Rightarrow$ η Iso)

$(GY \xrightarrow{\mu_{GY}} GFGY) = G(Y \xrightarrow{h} FGY)$ für ein h

Prüfe: $\eta_Y \circ h = id_Y$ und $h \circ \eta_Y = id_{FGY}$ [...] [...].

□

---

* Nachtrag: Diese Bedingung ist im Allgemeinen leicht stärker als die Bedingung, dass η ein Epimorphismus in der Kategorie der Funktoren C → D und natürlichen Transformation ist; vgl. https://mathoverflow.net/q/17953

9. Beispiel: $\mathrm{Groups} \underset{I}{\overset{(\ )^{ab}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Ab}$ (vgl. Bsp. 3b)

I ist volltreu, und $\eta_A : (IA)^{ab} \xrightarrow{\cong} A$.

Eine Äquivalenz $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ besteht aus $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ und natürlichen Isos $\mu : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \rightsquigarrow GF$

$\eta : FG \rightsquigarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$.

Und für so eine Äquivalenz gilt:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) \underset{F}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FGY) \underset{\eta_Y^*}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y)$$

Ist also jede Äquivalenz eine Adjunktion?
Ja, aber μ und η sind nicht zwangsläufig Einheit und Koeinheit:

10. Satz (Äquivalenz als Adjunktion)

Ist eine Äquivalenz wie oben gegeben, so existieren natürliche Isos $\tilde{\mu} : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \rightsquigarrow GF$

und $\tilde{\eta} : FG \rightsquigarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$,

die zusammen die Dreiecksgleichungen erfüllen.
Insbesondere gilt also $F \dashv G$ (und auch $G \dashv F$).

Beweis: trickreich

$\mathrm{Id} \overset{\mu}{\rightsquigarrow} GF$

Trick 1: $GF\mu = \mu_{GF}$, denn

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "\mu_X"'] & GFX \arrow[d, "GF\mu_X"] \\
GFX \arrow[r, "\mu_{GFX}"'] & GFGFX
\end{tikzcd}$$

kommutiert (da μ natürlich) und μ_X ist ein Iso.

analog: $FG\eta = \eta_{FG}$

Trick 2: Definiere $\tilde{\mu} := \mu$,

$\tilde{\eta}$:

$$\begin{tikzcd}
FG \arrow[d, squiggly, "\eta^{-1}_{FG}"'] & \\
FGFG \arrow[r, squiggly, "(F\mu_G)^{-1}"] & FG \arrow[d, squiggly, "\eta"] \\
& \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}
\end{tikzcd}$$

.

Jetzt kann man „nachrechnen", dass die Dreiecksgl. erfüllt sind.

$G\tilde{\eta} \circ \tilde{\mu}_G = \mathrm{id}$:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, squiggly, "\mu_G"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] & GFG \arrow[d, squiggly, "G\eta^{-1}_{FG}"'] \arrow[r, squiggly, "\mu_G^{-1}"] & G \arrow[d, squiggly, "G\eta^{-1}"] \arrow[dd, bend left=60, "\mathrm{id}"] \\
& GFGFG \arrow[d, squiggly, "G\eta_{FG}"'] \arrow[r, squiggly, "\overset{GF(\mu_G^{-1})}{\overset{\shortparallel}{G(F\mu_G)^{-1}}}"] & GFG \arrow[d, squiggly, "G\eta"] \\
& GFG \arrow[r, squiggly, "\mu_G^{-1}"'] & G
\end{tikzcd}$$

Natürlichkeit von η

[...]

$\square$

11. Def.: Ein Funktor $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ erhält einen Limes $(L, \lambda_\bullet)$ für ein Diagramm $D: I \longrightarrow \mathcal{C}$, wenn $(FL, F\lambda_\bullet)$ ein Limes ist für das Diagramm $FD: I \longrightarrow \mathcal{D}$.

— analog für Kolimiten —

12. Satz: R A P L

Right Adjoints Preserve Limits

Rappel!

Rechtsadjungierte erhalten Limiten (soweit sie exist.)
Linksadjungierte erhalten Kolimiten (soweit sie exist.)

13. Beispiele:

(a) Der Vergissfunktor $U: \mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Sets}$
- erhält Limiten, da rechtsadj. zum diskreten Funktor
- erhält Kolimiten, da linksadj. zum Klumpenfunktor

(b) Der Vergissfunktor $U: \mathrm{Ab} \longrightarrow \mathrm{Sets}$
- erhält Limiten, da rechtsadj. zum freien Funktor
- erhält nicht alle Kolimiten, z.B. i.A.

$$U(A_1 \oplus A_2) \not\cong UA_1 \amalg UA_2$$

(c) Die Inklusion $I: \mathrm{Ab} \hookrightarrow \mathrm{Groups}$
- erhält Limiten, da rechtsadj. zur Abelianisierung
- erhält nicht alle Kolimiten, z.B. i.A.

$$I(A_1 \oplus A_2) \not\cong IA_1 * IA_2$$

(d) Für eine Abbildung von Mengen $f: X \longrightarrow Y$ gilt

i.A. $f(U_1 \cup U_2) = fU_1 \cup fU_2$ — f linksadj. zu f^{-1}

$f(U_1 \cap U_2) \neq fU_1 \cap fU_2$ — f ist nicht rechtsadj.

$f^{-1}(U_1 \cup U_2) = f^{-1}U_1 \cup f^{-1}U_2$ — f^{-1} linksadj. zu f

$f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}U_1 \cap f^{-1}U_2$ — f^{-1} rechtsadj. zu $f_!$

—vgl. Bsp. 3(e):

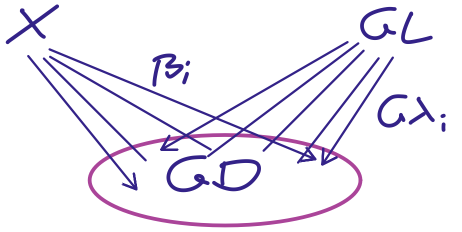
$$\begin{tikzcd}(\mathcal{P}(X), \subseteq) \arrow[r, shift left=2, "f"] \arrow[r, shift right=2, "f_!"'] & (\mathcal{P}(Y), \subseteq) \arrow[l, "f^{-1}"']\end{tikzcd}$$

Beweis: Seien $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ adjungierte Funktoren ($F \dashv G$).

Sei $(L, \lambda_\bullet)$ Limes für $D : I \longrightarrow \mathcal{D}$.

zz: $(GL, G\lambda_\bullet)$ Limes für $GD : I \longrightarrow \mathcal{C}$.

Sei dazu $(X, \beta_\bullet)$ ein Kegel über GD.



Dem Kegel $(X, \beta_\bullet)$ über GD entspricht unter der Adjunktion ein Kegel

$$(FX, \eta_D \circ F\beta_\bullet) \text{ über } D.$$

(Gegeben:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\beta_i"'] \arrow[dr, "\beta_j"] & \\ GD(i) \arrow[rr, "GD(z)"'] & & GD(j) \end{tikzcd}$$

kommutiert für jedes $i \xrightarrow{z} j$.

Zu zeigen:

$$\begin{tikzcd} & FX \arrow[dl, "F\beta_i"'] \arrow[dr, "F\beta_j"] & \\ FGD(i) \arrow[rr, "FGD(z)"'] \arrow[d, "\eta_D"'] & & FGD(j) \arrow[d, "\eta_D"] \\ D(i) \arrow[rr, "D(z)"'] & & D(j) \end{tikzcd}$$

kommutiert (= F(Dreieck oben))

kommutiert da η natürlich

)

Also existiert genau ein Morphismus von Kegeln

$$f : (FX, \eta_D \circ F\beta_\bullet) \longrightarrow (L, \lambda_\bullet)$$

Diesem f entspricht unter der Adjunktion wiederum ein eindeutiger Morphismus von Kegeln

$$Gf \circ \eta : (X, \beta_\bullet) \longrightarrow (GL, G\lambda_\bullet)$$

(Gegeben:

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F\beta_i"'] & L \arrow[ddl, "\lambda_i"] \\
FGD(i) \arrow[d, "\eta_D"'] & \\
D &
\end{tikzcd}$$

kommutiert für alle i in I.

Zu zeigen:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\beta_i"'] \arrow[ddr, "\beta_i"] & GFX \arrow[r, "Gf"] \arrow[d, "GF\beta_i"] & GL \arrow[ddl, "G\lambda_i"] \\
GD(i) \arrow[r, "\mu_G"] \arrow[dr, "id"'] & GFGD(i) \arrow[d, "G\eta_D"] & \\
& GD(i) &
\end{tikzcd}$$

kommutiert da μ natürlich

kommutiert (= G(obiges Dreieck))

Δ- Gleichung

)

□