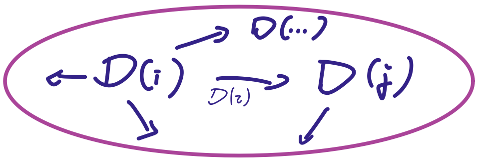
K5: Limiten und Kolimiten

1. Def.: I eine Kategorie. Ein Diagramm der Form I in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Funktor $D: I \longrightarrow \mathcal{C}$.



2. Bsp.:

(a) $I = $ $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop below] \arrow[r] & \bullet \arrow[loop below] \end{tikzcd}$

Diagramm der Form I in $\mathcal{C}$ ist ein Morphismus in $\mathcal{C}$

(b) $I = $ $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[loop above] \arrow[d] \\ \bullet \arrow[loop below] \arrow[r] & \bullet \arrow[loop below] \end{tikzcd}$

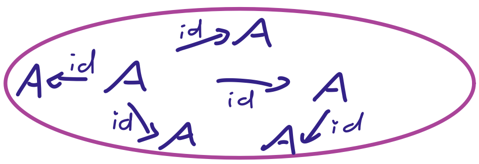
Diagramm der Form I in $\mathcal{C}$ ist ein kommutatives Quadrat in $\mathcal{C}$.

(c) $I = $ $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \bullet \arrow[loop above] \arrow[d] \\ \bullet \arrow[loop below] \arrow[r] & \bullet \arrow[loop below] \end{tikzcd}$

Diagramm der Form I in $\mathcal{C}$ ist ein (nicht notw. kommutatives) Quadrat in $\mathcal{C}$.

3. Def.: $I, \mathcal{C}$ wie oben. Für jedes Objekt A von $\mathcal{C}$ haben wir das konstante Diagramm

$$\begin{aligned} \Delta A : I &\longrightarrow \mathcal{C} \\ i &\longmapsto A \\ u \downarrow & \qquad \downarrow id_A \\ j &\longmapsto A \end{aligned}$$



4. Notiz: Wir haben einen Funktor:

$$\begin{tikzcd} \Delta : \mathcal{C} \arrow[rr] & & \mathrm{Fun}(I, \mathcal{C}) \\ A \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto] & & \Delta A \arrow[d, Rightarrow, "f_*"] \\ B \arrow[r, mapsto] & & \Delta B \end{tikzcd}$$

(= natürliche Trafo bestehend aus
$$\begin{tikzcd} (\Delta A)(i) = A \arrow[d, "f"] \\ (\Delta B)(i) = B \end{tikzcd}$$
)

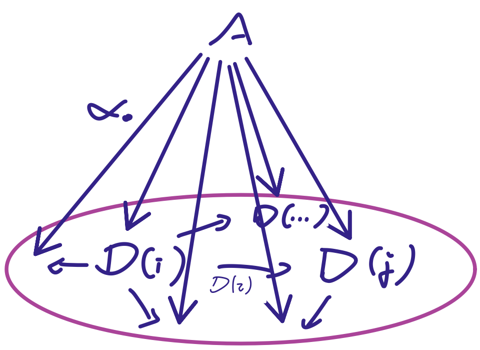
5. Def.: Ein Kegel über einem Diagramm D mit Spitze A (für $A \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$) ist eine natürliche Trafo

$$\begin{tikzcd} \Delta A \arrow[d, Rightarrow, "\alpha"'] \\ D \end{tikzcd}.$$

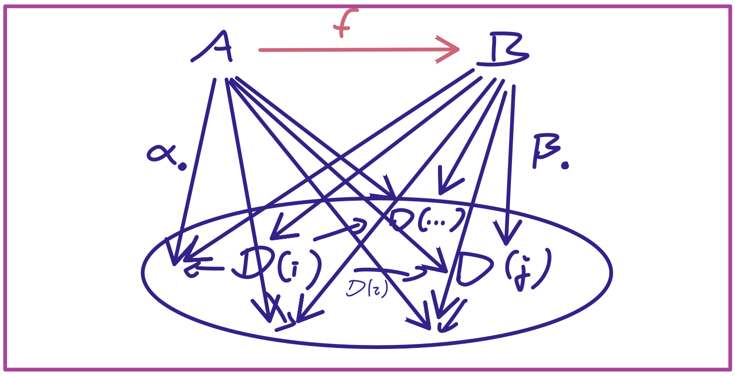
Konkret wird ein Kegel beschrieben durch eine Familie von Morphismen $\alpha_\bullet = \{\alpha_i : A \longrightarrow D(i) \mid i \in \operatorname{ob} I\}$ derart, dass

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\alpha_i"'] \arrow[dr, "\alpha_j"] & \\ D(i) \arrow[rr, "D(z)"'] & & D(j) \end{tikzcd}$$

kommutiert für jeden Morphismus $i \xrightarrow{z} j$ in I.



Sind $(A, \alpha_\bullet)$ und $(B, \beta_\bullet)$ zwei Kegel über D, so ist ein Morphismus von Kegeln $(A, \alpha_\bullet) \xrightarrow{f} (B, \beta_\bullet)$ ein Morphismus $f : A \longrightarrow B$ in $\mathcal{C}$, sodass $\beta_i \circ f = \alpha_i$ für jedes $i \in \operatorname{ob} I$.



Wir erhalten so die Kategorie der Kegel über D.

6. Def.: $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor, $D \in \mathrm{ob}\,\mathcal{D}$

Die Kategorie $F \downarrow D$ hat

Objekte: (A, α) mit $A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$, $\alpha: FA \to D$

$$\mathrm{Hom}_{F\downarrow D}((A,\alpha),(B,\beta)) := \left\{ A \xrightarrow{f} B \text{ in } \mathcal{C} \;\middle|\; \boxed{\begin{tikzcd} FA \arrow[rr, "Ff"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & FB \arrow[dl, "\beta"] \\ & D & \end{tikzcd}} \text{ kommutiert} \right\}$$

Die Kategorie $D \downarrow F$ hat

Objekte: (A, α) mit $A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$, $\alpha: D \to FA$

$$\mathrm{Hom}_{F\downarrow D}((A,\alpha),(B,\beta)) := \left\{ A \xrightarrow{f} B \text{ in } \mathcal{C} \;\middle|\; \begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ FA \arrow[rr, "Ff"'] & & FB \end{tikzcd} \text{ kommutiert} \right\}$$

7. Bsp.: $\mathcal{D} \downarrow D = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \downarrow D$

8. Notiz: Kategorie der Kegel ist isomorph zu $\Delta \downarrow D$ für $\Delta: \mathcal{C} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Fun}(I, \mathcal{C})}$

Kategorie der Diagramme der Form I in $\mathcal{C}$

$A \longmapsto \Delta A$

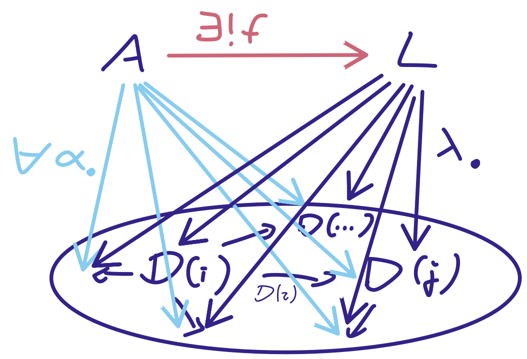
(wie in Notiz 4).

9. Def.: Sei $D: I \longrightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm in $\mathcal{C}$.
Ein *Limes* $(L, \lambda_\bullet)$ von D ist eine Darstellung
von $F_D: \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Sets}$

$$\begin{array}{ccccc} A & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l}\text{Kegel über } D \\ \text{mit Spitze } A \end{array}\right\} & & (A, \beta_\bullet \circ f) \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\uparrow {\scriptstyle f^*} & & \uparrow \\ B & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l}\text{Kegel über } D \\ \text{mit Spitze } B \end{array}\right\} & & (B, \beta_\bullet) \end{array}$$

D.h.:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, L) & \xrightarrow{\cong} & \left\{ \begin{array}{l}\text{Kegel über } D \\ \text{mit Spitze } A \end{array}\right\} \\ f & \longmapsto & F_D(f)(L, \lambda_\bullet) = (A, \lambda_\bullet \circ f) \end{array}$$



10. Notiz: Konkret bedeutet die UE von $(L, \lambda_\bullet)$ also:
Für jeden Kegel $(A, \alpha_\bullet)$ über D existiert
genau ein Morphismus $f: A \longrightarrow L$ in $\mathcal{C}$
mit $\alpha_\bullet = \lambda_\bullet \circ f$.

11. Notiz: $(\underset{\in\,\mathcal{C}}{L}, \underset{\in\,F_D(L)}{\lambda_\bullet})$ ist Limes von D

$\Updownarrow$

$\underbrace{(L, \lambda_\bullet)}_{\in\, \Delta \downarrow D}$ ist Endobjekt von $\Delta \downarrow D$.

12. Bsp:

(a) binäres Produkt

Ein Produkt von $X_1, X_2 \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$ ist ein Limes über $D: (\bullet_1 \quad \bullet_2) \longrightarrow \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto X_1 \\ 2 &\longmapsto X_2 \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "\forall f_1"'] \arrow[d, "\exists!"] \arrow[dr, "\forall f_2"] & \\ X_1 & \boxed{X_1 \times X_2} \arrow[l] \arrow[r] & X_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "\exists!"] \arrow[d, "\forall f_1"'] \arrow[dr, "f_2" near start] & \boxed{X_1 \times X_2} \arrow[dl] \arrow[d] \\ X_1 & X_2 \end{tikzcd}$$

(b) beliebiges Produkt

I Menge, aufgefasst als diskrete Kategorie

Ein Limes über ein $D: I \longrightarrow \mathcal{C}$

$$i \longmapsto X_i$$

heißt **Produkt der X_i** (übliche Notation: $\prod_{i \in I} X_i$).

Unterbsp.: in $\mathcal{C} = \mathrm{Set}, \mathrm{Group}, \mathrm{Ab}, \mathrm{Mod}_R, \mathrm{Top}$ ist das kartesische Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ (mit komponentenweiser Addition etc. / Produkttop.) so ein Produkt.

(c) Faserprodukt / Pullback

Ein Diagramm $D: \left(\begin{tikzcd} \bullet \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dl] \\ & \bullet & \end{tikzcd} \right) \longrightarrow \mathcal{C}$

können wir visualisieren als

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[dr, "b_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "b_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Ein Limes $\boxed{X_1 \times_{b_1, B, b_2} X_2}$ oder $\boxed{X_1 \times_B X_2}$ über solch einem Diagramm heißt

Faserprodukt von b_1 & b_2 /

Pullback von b_1 entlang b_2

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "\exists!"] \arrow[drr, bend left, "\forall f_1"] \arrow[ddr, bend right, "\forall f_2"'] & & \\
& \boxed{X_1 \times_B X_2} \arrow[r, "\lambda_1"] \arrow[d, "\lambda_2"'] & X_1 \arrow[d, "b_1"] \\
& X_2 \arrow[r, "b_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

Die UE besagt:

- $b_1 \circ \lambda_1 = b_2 \circ \lambda_2$
- zu je zwei Morphismen $f_1 : T \to X_1$, $f_2 : T \to X_2$ mit $b_1 \circ f_1 = b_2 \circ f_2$ existiert genau ein Morphismus $f : T \longrightarrow \boxed{X_1 \times_B X_2}$ mit $\lambda_1 \circ f = f_1$, $\lambda_2 \circ f = f_2$.

Unterbsp.:

in $\mathcal{C}$ = Sets ist

$$\boxed{X_1 \times_B X_2} = \{ (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid b_1(x_1) = b_2(x_2) \}$$

zusammen mit den kanonischen Projektionen

$$\begin{tikzcd}
\boxed{X_1 \times_B X_2} \arrow[r, "\lambda_1"] \arrow[d, "\lambda_2"'] & X_1 \\
X_2 &
\end{tikzcd} \qquad (x_1, x_2) \mapsto x_1, \quad (x_1, x_2) \mapsto x_2$$

so ein Faserprodukt.

in $\mathcal{C}$ = Grp, Ab, Mod_R analog

in $\mathcal{C}$ = Top: statte $X_1 \times_B X_2$ mit Untertopologie bzgl. Produkttopologie auf $X_1 \times X_2$.

(d) inverser/sequentieller Limes

Betrachte $I := (\mathbb{N}, \leq)^{op}$

$$\begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l] & 3 \arrow[l] \arrow[ll, bend right] & 4 \arrow[l] \arrow[ll, bend right] & 5 \arrow[l] \arrow[ll, bend right] & \dots \end{tikzcd}$$

Ein Diagramm $D: I \longrightarrow \mathcal{C}$ können wir visualisieren als Sequenz

$$X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow X_3 \leftarrow X_4 \leftarrow X_5 \dots$$

mit je einem Morphismus $X_j \xleftarrow[p_{jk}]{} X_k$ für jedes $j \leq k$.

(Es reicht, die Morphismen $p_{j,j+1}$ anzugeben.)

Ein Limes $\left(\boxed{\varprojlim_i X_i}, \lambda_\bullet\right)$ über D heißt inverser/sequentieller Limes X_i.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rrrr, "\exists! f"] \arrow[d, "\forall f_\bullet"'] \arrow[dr] \arrow[drr] \arrow[drrr] \arrow[drrrr] & & & & \boxed{\varprojlim_i X_i} \arrow[dllll] \arrow[dlll] \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d, "\lambda_\bullet"] \\
X_1 & X_2 \arrow[l] & X_3 \arrow[l] & X_4 \arrow[l] & X_5 \arrow[l] & \dots
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{C} = \mathrm{Sets}$:

$$\boxed{\varprojlim_i X_i} := \left\{ (x_i)_i \in \prod_{i \in I} X_i \;\middle|\; p_{i,i+1}(x_{i+1}) = x_i \quad \forall i \right\}$$

(Aus $f_i : T \longrightarrow X_i$ erhalten wir

$$f: T \longrightarrow \boxed{\varprojlim_i X_i}$$
$$t \longmapsto (f_i(t))_i \quad .)$$

$\mathcal{C} = \mathrm{Ab}, \mathrm{Mod}_R, \mathrm{Rings}$

— genauso, Add. etc. komponentenweise

z.B.: $\mathbb{Z}_p \cong \varprojlim \left(\mathbb{Z}/p \leftarrow \mathbb{Z}/p^2 \leftarrow \mathbb{Z}/p^3 \leftarrow \dots \right)$

p-adische Zahlen

z.B. $\mathbb{R}[[t]] \cong \varprojlim \left(\mathbb{R} = \frac{\mathbb{R}[t]}{(t)} \leftarrow \frac{\mathbb{R}[t]}{(t^2)} \leftarrow \frac{\mathbb{R}[t]}{(t^3)} \leftarrow \dots \right)$

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \;\hat{=}\; \left(a_0 \;,\; a_0 + a_1 t, \; a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \dots \right)$

Potenzreihenring

(e) ein Kern von $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R ist ein Limes von $M \underset{0}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N$ (vgl. K4, Bsp. 10a).

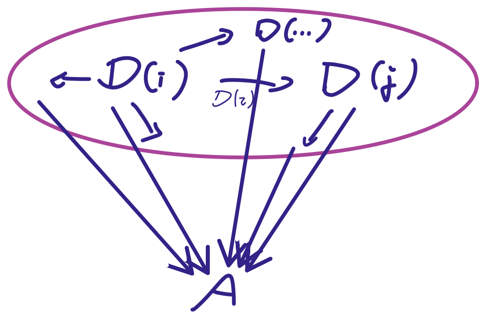
$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, dashed, "\exists!"'] \arrow[d, "\forall"] \arrow[dr] & \\
\underline{\mathrm{Ker}(f)} \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & N
\end{tikzcd}$$

notwendig 0

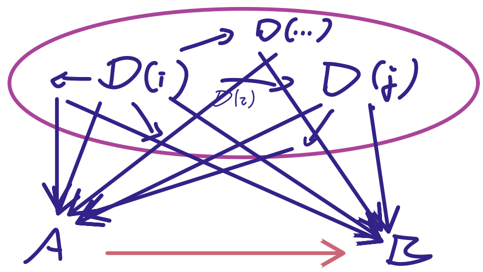
13. Def.: Kokegel und Kolimiten

„wie Kegel & Limiten, aber alle Pfeile umgedreht"

Also: Kokegel unter einem Diagramm $D : I \longrightarrow \mathcal{C}$ mit Spitze $A \in ob\,\mathcal{C}$: natürliche Trafo $D \rightsquigarrow \Delta A$

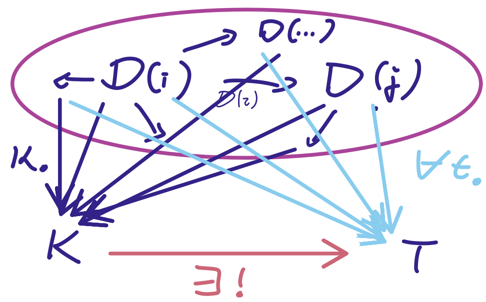


Morphismus von Kokegeln:



Kategorie der Kokegel isomorph zu $D \downarrow \Delta$ für $\Delta : \mathcal{C} \longrightarrow Fun(I, \mathcal{C})$.

Universelle Eigenschaft eines Kolimes $(K, \kappa_\bullet)$ unter D:



Für jeden Kokegel $(T, t_\bullet)$ unter D existiert genau ein $f : K \longrightarrow T$ mit $t_i = f \circ \kappa_i \quad \forall i \in ob\, I$.

(Ein Kolimes ist also ein Anfangsobjekt in $D \downarrow \Delta$.)

14. Beispiel:

(a) ein binäres Koprodukt ist ein Kolimes von

$$D : \begin{pmatrix} \overset{\mathcal{C}}{\bullet} 1 \\ \overset{\mathcal{C}}{\bullet} 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{C}.$$

(b) beliebiges Koprodukt:

I Menge, aufgefasst als diskrete Kategorie

Kolimes $\boxed{\coprod X_i}$ von $D : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ i & \longmapsto & X_i \end{array}$ heißt

Koprodukt der X_i.

$\mathcal{C} = \text{Set}, \text{Top}$

$\boxed{\coprod X_i} = \coprod_i X_i$ disjunkte Vereinigung (mit Summentopologie)

$\mathcal{C} = \text{Ab}, \text{Mod}_R$

$$\boxed{\coprod X_i} = \bigoplus_{i \in I} X_i$$

$$:= \left\{ (x_i)_i \in \prod_{i \in I} X_i \;\middle|\; \text{fast alle } x_i = 0 \right\}$$

zusammen mit den kanonischen Abb.

$$\begin{array}{ccc} X_i & \longrightarrow & \bigoplus_i X_i \\ x_i & \longmapsto & (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d] \arrow[drr, "f_i"] & X_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & X_3 \arrow[dll] \arrow[d] & \dots \arrow[dlll] \arrow[dl] \\
\bigoplus_i X_i \arrow[rr, "\exists ! f"'] & & T &
\end{tikzcd}$$

$$(x_i)_i \longmapsto \sum_{i \in I} f_i(x_i)$$

(c) Amalgam / Pushout

Ein Kolimes von
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & X_1 \\ X_2 & \end{tikzcd}$$
in $\mathcal{C}$ heißt

Amalgam von α_1 und α_2 / Pushout von α_1 entlang α_2, geschrieben $\boxed{X_1 \amalg_{\alpha_1, A, \alpha_2} X_2}$ oder kurz $\boxed{X_1 \amalg_A X_2}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & X_1 \arrow[d, "\iota_1"] \arrow[ddr, bend left, "\forall f_1"] & \\ X_2 \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[drr, bend right, "\forall f_2"'] & \boxed{X_1 \amalg_A X_2} \arrow[dr, "\exists!"] & \\ & & T \end{tikzcd}$$

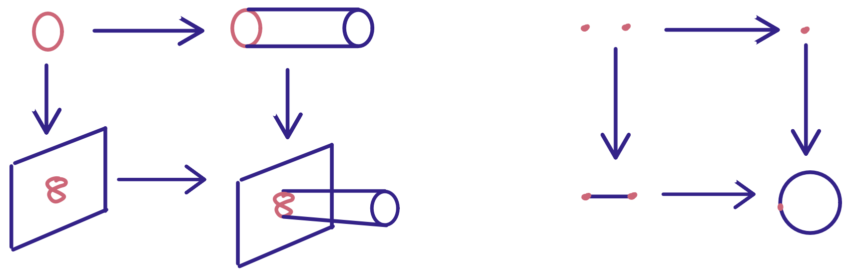
$\mathcal{C} = \mathcal{S}ets$

$X_1 \amalg_A X_2 := \dfrac{X_1 \amalg X_2}{\approx}$, wobei $\approx$ die von $(\alpha_1(a), 1) \sim (\alpha_2(a), 2)$ (für $a \in A$) erzeugte Äquivalenzrelation ist,

zusammen mit
$$X_i \xrightarrow{\iota_i} \frac{X_1 \amalg X_2}{\approx}, \quad x \longmapsto (x, i)$$
erfüllt die geforderte UE.

$\mathcal{C} = \mathcal{T}op$ Statte $X_1 \amalg_A X_2$ mit der Quotiententopologie bzgl der Summentopologie auf $X_1 \amalg X_2$ und $X_1 \amalg X_2 \twoheadrightarrow X_1 \amalg_A X_2$ aus.

z.B.



(d) sequentieller Kolimes / direkter Limes

Ein Diagramm $D : (\mathbb{N}, \leq) \longrightarrow \mathcal{C}$ können wir visualisieren als

$$X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4 \to \dots$$

mit je einem Morphismus $z_{kj} : X_j \to X_k$ für $j \leq k$.
$(z_{kk} = id)$

Ein Kolimes von D heißt
sequentieller Kolimes oder direkter Limes,
geschrieben $\boxed{\operatorname{colim}_{\to i} X_i}$ oder $\boxed{\lim_{\to i} X_i}$.

$\mathcal{C} = $ Sets

$\operatorname{colim}_{\to i} X_i = \coprod X_i / \approx$, wobei $\approx$ folgende Äquivalenzrelation ist

$$(x, j) \approx (x', k) \iff \exists l \geq k, j : z_{lj}(x) = z_{lk}(x'),$$

zusammen mit den offensichtlichen Abb.
$X_i \to \coprod X_i / \approx$ hat die geforderte UE.

Übung: Sind alle z_{jk} injektiv, so ist
$$\operatorname{colim}_{\to i} X_i = \bigcup_i X_i$$

$\mathcal{C} = \mathrm{Top}$ — analog
(Das definiert eine kanonische Topologie auf unendlichen Vereinigungen, nämlich:
$$\mathcal{U} \subseteq \bigcup_i X_i \text{ offen} \iff \mathcal{U} \cap X_i \text{ offen in } X_i \text{ für jedes } i.)$$

$\mathcal{C} = \mathrm{Ab}, \mathrm{Mod}_R$
Auch hier existiert $\underrightarrow{\mathrm{colim}}_i X_i$, und kann als Quotient von $\bigoplus_i X_i$ konstruiert werden.

(e) ein Kokern von $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R ist ein Kolimes von $M \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} N$ (vgl. K4, Bsp. 10b).