

# K4: Universelle Eigenschaften

$\mathcal{C}$  lokal kleine Kategorie,  $A \in \text{ob } \mathcal{C}$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -): \mathcal{C} \longrightarrow \text{Sets}$$

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \text{Sets} \quad \text{weiterer Funktor}$$

**1. Lemma:** Jedes  $a \in FA$  definiert eine natürliche Trafo

$$\alpha^a: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) \rightsquigarrow F$$

mittels

$$\alpha_B^a: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow FB$$

$$f \longmapsto (Ff)(a)$$

**Beweis:**

Für  $\begin{array}{c} B \\ g \downarrow \\ C \end{array}$  erhalten wir

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) & \xrightarrow{\alpha_B^a} & FB \\
 \downarrow g_* & & \downarrow Fg \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) & \xrightarrow{\alpha_C^a} & FC \\
 \downarrow g \circ f & & \downarrow F(g \circ f)
 \end{array}$$

$(Ff)(a) \xrightarrow{\quad} (Fg)(Ff)(a) \xrightarrow{\quad} (F(g \circ f))(a)$

□

**2. Notiz:** Die Konstruktion lässt sich auch anwenden auf ein  $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Sets}$  und liefert dann Trafo

$$\alpha^a: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \rightsquigarrow F$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, -)$$

**3. Satz: Yoneda-Lemma**

Für  $\mathcal{C}, A, F$  wie oben wie oben definiert

$$FA \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{natürliche Trafos} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) \rightsquigarrow F \end{array} \right\}$$

$$a \longmapsto \alpha^a$$

eine Bijektion.

**Beweis:**

Definiere

$$FA \longleftarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{natürliche Trafos} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) \rightsquigarrow F \end{array} \right\}$$

$$\alpha_A(\text{id}_A) \longleftarrow \alpha$$

$$(\varrho = id): \quad \alpha_A^a(id_A) = (F(id_A))(a) = id_{FA}(a) = a$$

(\(\sigma = id\)): Sei  $a := \alpha_A(id_A)$ .

Zu zeigen:  $\alpha^a = \alpha$

Wähle dazu beliebiges  $f: A \rightarrow B$  in  $\mathcal{C}$  und

rechne nach:  $\alpha_B^a(f) = (Ff)(a)$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}(A, A) & \xrightarrow{\alpha_A} & FA \\
 \downarrow f_* & & \downarrow Ff \\
 \text{Hom}(A, B) & \xrightarrow{\alpha_B} & FB
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= (Ff)(\alpha_A(id_A)) \\
 &= \alpha_B(f_*(id_A)) \\
 &= \alpha_B(f)
 \end{aligned}$$

□

#### 4. Korollar: Yoneda-Einbettung „Prägarben auf $\mathcal{C}$ “

Für jede lokal kleine Kategorie  $\mathcal{C}$  haben wir volltreue

Funktionen (a)  $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \text{Sets})$   
 $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$

(b)  $\gamma^*: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Sets})$   
 $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -): \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$

$$\begin{array}{ccc}
 z_1 & \text{Hom}(X, z_1) \\
 h \downarrow & \downarrow h_* \\
 z_2 & \text{Hom}(X, z_2)
 \end{array}$$

Beweis:

(a) & (b) äquivalent

Zu b: Für jedes  $Y \xleftarrow{f} X$  in  $\mathcal{C}$  definiert  $f^*$

natürliche Trafo  $\gamma^*(Y) \xrightarrow{f^*} \gamma^*(X)$ :

Explizit:  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \xrightarrow{(f^*)_Z} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$   
 $g \mapsto g \circ f$

Das ist natürlich:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}(Y, z_1) & \xrightarrow{(f^*)_{z_1}} & \text{Hom}(X, z_1) \\
 h_* \downarrow & & \downarrow h_* \\
 \text{Hom}(Y, z_2) & \xrightarrow{(f^*)_{z_2}} & \text{Hom}(X, z_2)
 \end{array}$$

für  $h \downarrow$  erhalten wir

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}(Y, z_1) & \xrightarrow{(f^*)_{z_1}} & \text{Hom}(X, z_1) \\
 \downarrow h_* & & \downarrow h_* \\
 \text{Hom}(Y, z_2) & \xrightarrow{(f^*)_{z_2}} & \text{Hom}(X, z_2)
 \end{array}$$

Das ist kommutativ, da  $h_* \circ (f^*)_{z_1} = (f^*)_{z_2} \circ h_*$ .

Das definiert  $\gamma^*$  auf Morphismen.

Satz 3 liefert eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(Y, X) & & \text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Sets})}(\gamma^*(Y), \gamma^*(X)) \\ \parallel & & \parallel \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \xrightarrow{\cong} & \left\{ \begin{array}{l} \text{natürliche Trafos} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -) \rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \end{array} \right\} \\ f & \mapsto & \alpha^f \end{array}$$

Hier war  $\alpha^f$  definiert als:

$$\begin{array}{ccc} \alpha_z^f: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ g & \mapsto & \begin{array}{l} g_*(f) \\ \parallel \\ g \circ f \\ \parallel \\ f^*(g) \\ \parallel \\ \gamma^*(f)(g) \end{array} \end{array} \quad \square$$

## 5. Anmerkung

Korollar 4 bedeutet insbesondere

(a) Ist  $\gamma X_1 \cong \gamma X_2$ , so ist bereits  $X_1 \cong X_2$ .

Wir können also ein Objekt  $X$  in  $\mathcal{C}$  bis auf Isomorphie dadurch festlegen, dass wir  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$  (als Funktor) angeben, also auf natürliche Weise für alle  $T \in \text{ob } \mathcal{C}$  alle Morphismen  $T \rightarrow X$  festlegen.

(b) Ist  $\gamma^* X_1 \cong \gamma^* X_2$ , so ist bereits  $X_1 \cong X_2$ .

Wir können also ein Objekt  $X$  in  $\mathcal{C}$  bis auf Isomorphie dadurch festlegen, dass wir  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$  (als Funktor) angeben, also auf natürliche Weise für alle  $T \in \text{ob } \mathcal{C}$  alle Morphismen  $X \rightarrow T$  festlegen.

6. Def.: Ein Funktor

$$F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets} \quad \text{bzw.} \quad F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$$

ist darstellbar, wenn er natürlich isomorph ist zu

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \quad \text{bzw.} \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$$

für ein  $A \in \text{ob } \mathcal{C}$ . Eine Darstellung von  $F$  ist ein Paar  $(A, a)$  mit  $A \in \text{ob } \mathcal{C}$  und  $a \in FA$  derart, dass die natürliche Trfo

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \xrightarrow{\alpha_a} F \quad \text{bzw.} \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) \xrightarrow{\alpha_a} F$$

ein Isomorphismus ist. Das Element  $a$  heißt dann universelles Element von  $F$ , und  $(A, a)$  hat die durch  $F$  definierte universelle Eigenschaft ( $\mathcal{U}$ ).

Zwei Sichtweisen:

- Wir verstehen Funktoren  $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$  besser, wenn wir eine Darstellung für sie finden.
- Wir verstehen Objekte/Konstruktionen in  $\mathcal{C}$  besser, wenn wir sie durch eine  $\mathcal{U}$  beschreiben können (vgl. Anmerkung 5).

7. Notiz - vgl. Anmerkung 5

Stellen  $(A, a)$  und  $(B, b)$  denselben Funktor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$  dar / haben  $(A, a)$  und  $(B, b)$  dieselbe  $\mathcal{U}$ , so existiert (genau) ein Isomorphismus  $f: A \xrightarrow{\cong} B$  mit  $(Ff)(a) = b$ .

Beweis: Betrachte

$$\begin{aligned} \alpha_B^a: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) &\xrightarrow{\cong} FB \ni b \\ \alpha_A^b: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) &\xrightarrow{\cong} FA \ni a \\ \alpha_A^a: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) &\xrightarrow{\cong} FA \end{aligned}$$

Da  $\alpha_B^0$  Bijektion ist,  $\exists!$   $f$  mit  $\alpha_B^0(f) = b$ , also  $(Ff)(a) = b$ .

Da  $\alpha_A^1$  Bijektion ist,  $\exists!$   $g$  mit  $(Fg)(b) = a$ .

Es ist

$$\alpha_A^0(g \circ f) = F(g \circ f)(a) = Fg(Ff(a)) = a$$

aber auch

$$\alpha_A^0(\text{id}_A) = a.$$

Also ist  $g \circ f = \text{id}_A$ .

Analog  $f \circ g = \text{id}_B$ . □

## 8. Beispiele

(a) Der vergessliche Funktor  $U: \text{Groups} \rightarrow \text{Sets}$  wird dargestellt durch  $(\mathbb{Z}, 1)$ , denn ein Gruppenhomomorphismus  $f: \mathbb{Z} \rightarrow G$  ist eindeutig festgelegt durch  $f(1) \in G$ .

$$\alpha_G^1: \text{Hom}_{\text{Groups}}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\cong} UG$$
$$f \mapsto f(1)$$

Umgekehrt hat  $(\mathbb{Z}, 1)$  die durch  $U$  definierte  $\underline{U}$ .

Ähnlich werden die folgenden vergesslichen Funktoren dargestellt:

$Ab$	$\longrightarrow$	$\text{Sets}$	durch	$(\mathbb{Z}, 1)$
$\text{Mod}_R$	$\longrightarrow$	$\text{Sets}$	durch	$(R, 1)$
$\text{Rings}$	$\longrightarrow$	$\text{Sets}$	durch	$(\mathbb{Z}[x], x)$
$\text{Top}$	$\longrightarrow$	$\text{Sets}$	durch	$(*, *)$

(6) Der kontravariante Potenzmengenfunctor

$$\mathcal{P}^*: \text{Sets}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$$

$$\begin{array}{ccc} S & \mapsto & \mathcal{P}(S) \cong f^{-1}A \\ f \downarrow & & \uparrow \quad \quad \quad \mathbb{I} \\ S' & \mapsto & \mathcal{P}(S') \cong A \\ & & \leftarrow \mathcal{P}(\{0,1\}) \end{array}$$

wird dargestellt durch  $(\{0,1\}, \{1\})$

$$\text{Hom}_{\text{Sets}}(S, \{0,1\}) \cong \mathcal{P}(S)$$

$$f \mapsto f^{-1}\{1\} = \mathcal{P}(f)(\{1\})$$

Umgekehrt hat  $(\{0,1\}, \{1\})$  die durch  $\mathcal{P}^*$  def.  $\mathbb{I}$ .

9. Beispiel: Anfangs- und Endobjekte

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, 1) \cong F: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Sets}$$

$$x \mapsto *$$

↙ Endobjekt in  $\mathcal{C}$

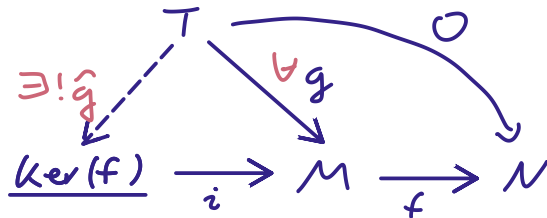
$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, -) \cong F: \mathcal{C} \longrightarrow \text{Sets}$$

$$x \mapsto *$$

↗ Anfangsobjekt

## 10a. Beispiel

Der (kategorielle) Kern eines Morphismus  $M \xrightarrow{f} N$  in  $\text{Mod}_R$  ist ein Objekt  $\underline{\ker(f)}$  in  $\text{Mod}_R$  zusammen mit einem Morphismus  $\underline{\ker(f)} \xrightarrow{i} M$  derart, dass  $f \circ i = 0$  und die folgende  $\mathcal{U}$  erfüllt ist:



Formal: Wähle  $F: \text{Mod}_R^{\text{op}} \longrightarrow \text{Sets}$

$$\begin{array}{ccc} T & \mapsto & \{g \in \text{Hom}_R(T, M) \mid f \circ g = 0\} \\ \epsilon \downarrow & & \epsilon^* \uparrow \\ T' & \mapsto & \{g \in \text{Hom}_R(T', M) \mid f \circ g = 0\} \end{array}$$

Die  $\mathcal{U}$  besagt:

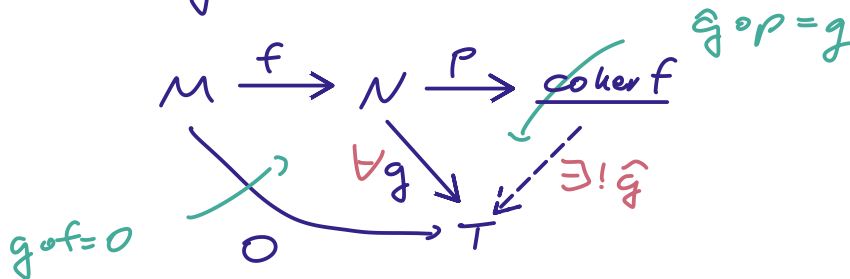
$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(-, \underline{\ker(f)}) &\cong F \\ \text{via } \text{Hom}_R(T, \underline{\ker(f)}) &\xrightarrow{\cong} FT \\ \hat{g} &\mapsto F(\hat{g})(i) = \hat{g} \circ i \end{aligned}$$

Natürlich hat  $\ker f = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$  zusammen mit der kanonischen Inklusion  $i: \ker f \rightarrow M$  diese  $\mathcal{U}$ .

(Aber auch  $i': \ker f \rightarrow M$  hat diese  $\mathcal{U}$ .)

## 106. Beispiel

Der (kategorielle) Kokern eines Morphismus  $M \xrightarrow{f} N$  in  $\text{Mod}_R$  ist ein Objekt coker f in  $\text{Mod}_R$  zusammen mit einem Morphismus  $N \xrightarrow{p} \text{coker f}$  derart, dass  $p \circ f = 0$  und die folgende  $\mathcal{U}$  erfüllt ist:



Formal: Wähle  $F: \text{Mod}_R \longrightarrow \text{Sets}$

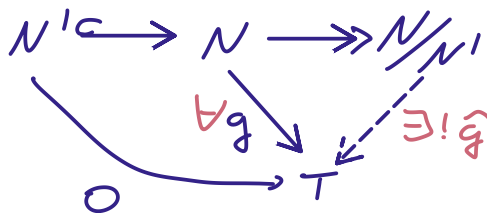
$$T \mapsto \{g \in \text{Hom}_R(N, T) \mid g \circ f = 0\}$$

$$t \mapsto t_*$$

Natürlich hat  $\text{coker } f := \frac{N}{F(M)}$  zusammen mit der

kanonischen Projektion  $N \longrightarrow \frac{N}{F(M)}$  diese  $\mathcal{U}$ .

Ist  $f$  die Inklusion eines Untermoduls  $N' \xrightarrow{f} N$  ergibt sich genau die  $\mathcal{U}$  des Quotienten  $\frac{N}{N'}$  aus  $M$ , Satz 11.

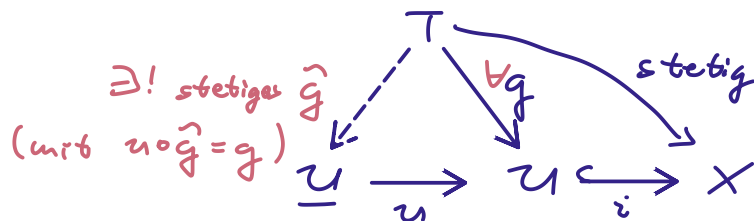




11a. Beispiel  $X$  top. Raum,  $U \hookrightarrow X$  Teilmenge

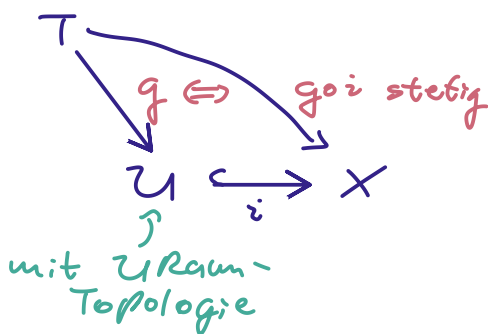
Der durch  $U$  definierte Unterraum ist ein top. Raum

$\underline{U}$  zusammen mit einer Abb.  $u: \underline{U} \rightarrow U$  derart, dass  $i \circ u$  stetig und folgende  $\mathcal{U}$  erfüllt ist:



Wählen wir  $T = *$ , sehen wir:  $u$  ist Bijektion.

Um Existenz zu zeigen, wählen wir  $\underline{U} = U$  mit Unterraumtopologie. Dann besagt  $\mathcal{U}$ :



( Formal: Wähle  $F: \text{Top}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$

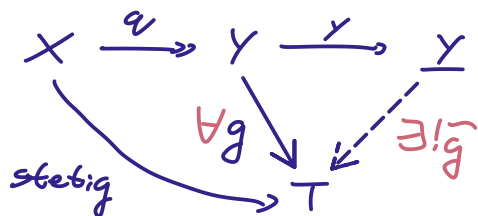
$$\begin{array}{ccc} T & \mapsto & \{g \in \text{Hom}_{\text{Sets}}(T, U) \mid i \circ g \text{ stetig} \} \\ \uparrow t & & \downarrow t^* \\ T' & \mapsto & \{g \in \text{Hom}_{\text{Sets}}(T', U) \mid i \circ g \text{ stetig} \} \end{array}$$

Die  $\mathcal{U}$  sagt:  $\text{Hom}_{\text{Top}}(-, \underline{U}) \cong F$

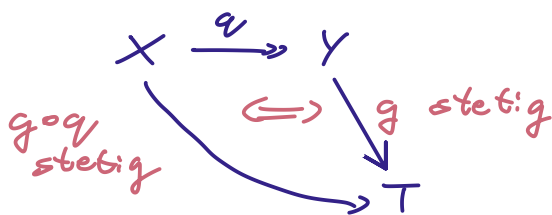
$$\begin{array}{ccc} \text{via } \text{Hom}_{\text{Top}}(T, \underline{U}) & \xrightarrow{\cong} & FT \\ g & \mapsto & (Fg)(u) = u \circ g \end{array} \quad \left. \begin{array}{c} T \xrightarrow{g} \underline{U} \xrightarrow{u} U \end{array} \right)$$

11.6. Beispiel:  $X$  top. Raum,  $q: X \twoheadrightarrow Y$  Surjektion (in Sets)

Der durch  $q$  definierte Quotientenraum ist ein top. Raum  $\underline{Y}$  zusammen mit einer Abb.  $\gamma: Y \rightarrow \underline{Y}$  davor, dass die Komposition  $\gamma \circ q$  stetig und folgende  $\mathcal{U}$  erfüllt ist:



Für Existenz wähle  $\underline{Y}$  mit Quotiententopologie (und  $\gamma = \text{id}$ ). Dann sagt die  $\mathcal{U}$ :



( Formal: Wähle  $F: \text{Top} \rightarrow \text{Sets}$

$$\begin{array}{l} T \mapsto \{g \in \text{Hom}_{\text{Sets}}(Y, T) \mid g \circ q \text{ stetig} \} \\ \downarrow t \\ T' \mapsto \{g \in \text{Hom}_{\text{Sets}}(Y, T') \mid g \circ q \text{ stetig} \} \end{array}$$

Die  $\mathcal{U}$  sagt:  $\text{Hom}_{\text{Top}}(\underline{Y}, -) \cong F$

$$\text{via } \text{Hom}_{\text{Top}}(\underline{Y}, T) \xrightarrow{\cong} FT \\ g \mapsto (Fg)(\gamma) = g \circ \gamma$$

)

# 12a. Bsp: Produkte

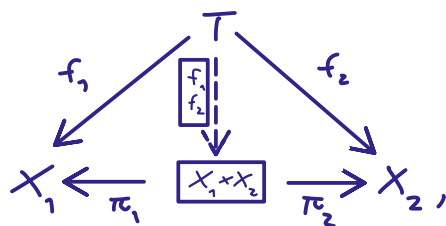
$\mathcal{C}$  Kategorie,  $X_1$  und  $X_2$  zwei Objekte. Ein **Produkt** von  $X_1$  und  $X_2$  ist ein Objekt  $\boxed{X_1 \times X_2}$  zusammen mit Morphismen

$$X_1 \xleftarrow{\pi_1} \boxed{X_1 \times X_2} \xrightarrow{\pi_2} X_2,$$

die folgende  $\mathcal{U}$  erfüllen: Für jedes Objekt  $T$  mit Morphismen

$$X_1 \xleftarrow{f_1} T \xrightarrow{f_2} X_2$$

existiert genau ein Morphismus  $T \xrightarrow{\boxed{\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}}} \boxed{X_1 \times X_2}$  mit  $\pi_i \circ \boxed{\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}} = f_i$  für  $i=1,2$ .



Formal: Wähle  $F = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X_1) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X_2) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$

Die  $\mathcal{U}$  sagt:  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \boxed{X_1 \times X_2}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X_1) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X_2)$   
 via  $f \mapsto (Ff)(\pi_1, \pi_2) = (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f)$

Unterbsp.:

$\mathcal{C} = \text{Set}$ :  $\boxed{X_1 \times X_2} = X_1 \times X_2$  zusammen mit

kanonischen Projektionen hat diese  $\mathcal{U}$ .



$\mathcal{C} = \text{Ab}$ :  $\boxed{X_1 \times X_2} = X_1 \oplus X_2 = \llcorner X_1 \times X_2$  mit komponentenweiser Addition  $\lrcorner$

zusammen mit kanonischen Projektionen hat diese  $\mathcal{U}$ .

$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$  ist genau dann Gruppenhomomorphismus, wenn  $f_1$  und  $f_2$  es sind.

$\mathcal{G} = \text{Groups oder Rings oder Mod}_R$  - analog

$\mathcal{G} = \text{Top}$   $\boxed{X_1 \times X_2} = X_1 \times X_2$  mit Produkttopologie hat diese  $\mathcal{U}$ :  
In Produkttopologie ist  $(f_1)$  genau dann stetig,  
wenn  $f_1$  und  $f_2$  stetig sind.

$\mathcal{G} = \text{Potenzmenge einer Menge } S, \text{ partiell geordnet mittels } \leq$   
Ein Produkt zweier Teilmengen  $X_1, X_2 \subseteq S$  ist eine  
Teilmenge  $\boxed{X_1 \times X_2} \subseteq S$  zusammen mit Inklusionen  
 $X_1 \supseteq \boxed{X_1 \times X_2} \subseteq X_2$  die folgende  $\mathcal{U}$  erfüllen:  
Eine Teilmenge  $T$  ist genau dann in  $\boxed{X_1 \times X_2}$  ent-  
halten, wenn sie in  $X_1$  und in  $X_2$  enthalten ist.

$$\begin{array}{c} T \\ \forall \ni \exists \cap \ni \forall \\ X_1 \supseteq \boxed{X_1 \times X_2} \subseteq X_2 \end{array}$$

Also ist  $\boxed{X_1 \times X_2} = X_1 \cap X_2$  ein Produkt in  $\mathcal{G}$ .

$\mathcal{G} = (C, \leq)$  - eine Menge mit einer Halbordnung

Ein Produkt von  $x_1 \in C$  und  $x_2 \in C$  ist  
ein Element  $\boxed{x_1 \times x_2} \in C$ , für das gilt:

$$\boxed{x_1 \times x_2} \leq x_1 \text{ und } \boxed{x_1 \times x_2} \leq x_2 \text{ und}$$

$$(t \leq x_1 \text{ und } t \leq x_2 \Rightarrow t \leq \boxed{x_1 \times x_2}).$$

Das ist also ein Infimum von  $x_1$  und  $x_2$ .

Vorheriges Bsp. ist Spezialfall.

I. A. muss so ein Infimum nicht existieren  
(z.B. wenn  $\leq$  triviale Halbordnung ist, in der  
gar keine Elemente vergleichbar sind.)

## 12b. Bsp: Koprodukte

$\mathcal{C}$  Kategorie,  $X_1$  und  $X_2$  zwei Objekte. Ein **Koprodukt** von  $X_1$  und  $X_2$  ist ein Objekt  $X_1 \amalg X_2$  zusammen mit Morphismen

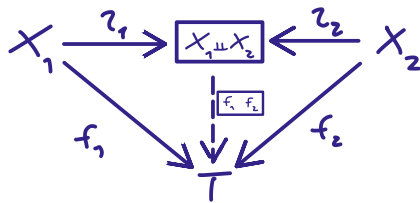
$$X_1 \xrightarrow{z_1} X_1 \amalg X_2 \xleftarrow{z_2} X_2,$$

die folgende  $\mathcal{U}$  erfüllen: Für jedes Objekt  $T$  mit Morphismen

$$X_1 \xrightarrow{f_1} T \xleftarrow{f_2} X_2,$$

existiert genau ein Morphismus  $X_1 \amalg X_2 \xrightarrow{f_1, f_2} T$  mit  $f_1, f_2 \circ z_i = f_i$

für  $i=1,2$ .



Formal: Wähle  $F = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, -) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$

Die  $\mathcal{U}$  sagt:  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \amalg X_2, -) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, -) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, -)$   
 via  $f \mapsto (Ff)(z_1, z_2) = (f \circ z_1, f \circ z_2)$

Unterbsp.:

$\mathcal{C} = \text{Set}$ :  $X_1 \amalg X_2 =$  abstrakte disjunkte Vereinigung  $X_1 \amalg X_2$   
 $(\cong \{(x, 1) \mid x \in X_1\} \cup \{(x, 2) \mid x \in X_2\})$

zusammen mit kanonischen Inklusionen

$$z_i: X_i \longrightarrow X_1 \amalg X_2 \\ x \mapsto (x, i)$$

hat die geforderte  $\mathcal{U}$ :

$$\begin{array}{ccc} X_1 \amalg X_2 & (x, i) & \\ \downarrow \text{f}_1, \text{f}_2 & \downarrow & \\ T & \text{f}_i(x) & \end{array}$$

ist eine und die einzige

Möglichkeit,  $f_1, f_2$  zu definieren.

$\mathcal{C} = \text{Top}$   $\boxed{X_1 \amalg X_2} = X_1 \amalg X_2$  mit Summentopologie hat diese  $\mathcal{U}$ :  
 ( $U \subseteq X_1 \amalg X_2$  offen  $\Leftrightarrow U \cap X_1$  offen und  $U \cap X_2$  offen)  
 In dieser Topologie ist  $(f_1, f_2)$  genau dann stetig,  
 wenn  $f_1$  und  $f_2$  stetig sind.

$\mathcal{C} = \text{Ab}$   $\boxed{X_1 \amalg X_2} = X_1 \oplus X_2$  (definiert wie in 5a) zusammen mit

$$\begin{array}{ccc}
 X_2 & \longrightarrow & X_1 \oplus X_2 & \longleftarrow & X_1 \\
 & & x \mapsto (x, 0) & & \\
 & & (0, x) \longleftarrow x & & 
 \end{array}$$

hat die geforderte  $\mathcal{U}$ :

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 \oplus X_2 & (x_1, x_2) & (= (x_1, 0) + (0, x_2)) \\
 \boxed{f_1, f_2} \downarrow & \downarrow & \\
 T & f_1(x_1) + f_2(x_2) & 
 \end{array}$$

ist eine und die einzige Möglichkeit,  $\boxed{f_1, f_2}$  als  
 Gruppenhomomorphismus zu definieren.

$\mathcal{C} = \text{Mod}_R$  - analog

$\mathcal{C} = \text{Groups}$   $\boxed{X_1 \amalg X_2} = X_1 * X_2$ , das freie Produkt von  $X_1$  und  $X_2$ ,  
 zusammen mit kanonischen Inklusionen  $X_i \rightarrow X_1 * X_2$   
 ist ein Koproduct.

$\mathcal{C} = \text{Potenzmenge einer Menge } S, \text{ partiell geordnet mittels } \leq$

$\boxed{X_1 \amalg X_2} = X_1 \cup X_2$ , die Vereinigung der Teilmengen,  
 ist ein Koproduct

$\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \leq)$  - eine Menge mit einer Halbordnung

Ein Koproduct von  $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$  ist ein Supremum  
 von  $x_1, x_2$  (wenn es existiert).