K3: Äquivalenzen & natürliche Trafos

1. Def.: $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ *voll* heißt:

$F: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX_1, FX_2)$

ist für alle X_i in $\mathcal{C}$ surjektiv.

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ *treu* heißt:

$F: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX_1, FX_2)$

ist für alle X_i in $\mathcal{C}$ injektiv.

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ *volltreu* heißt: voll und treu, also

$F: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX_1, FX_2)$

für alle X_i in $\mathcal{C}$ bijektiv.

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ *wesentlich surjektiv* heißt:

für jedes $Y \in \mathrm{ob}\,\mathcal{D}$ existiert ein

$X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ mit $FX \cong Y$.

2. Def.: $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ ist *Isomorphismus* von Kategorien,

falls $F: \mathrm{ob}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{ob}\,\mathcal{D}$ bijektiv

und F volltreu.

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ ist *Äquivalenz* von Kategorien,

falls F wesentlich surjektiv

und volltreu ist.

3. Notiz: F Iso $\iff$ $\exists\ \mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{D}$ mit $GF = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$
und $FG = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

Falls F Äquivalenz, $\exists$ auch Äquivalenz

$\mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{D}$ — Genaueres später.

4. Beispiele

(a) $\mathcal{C}$ Kategorie. Betrachte auf $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ Äquivalenzrelation

$$X \sim X' \;:\Longleftrightarrow\; X \cong X' \text{ in } \mathcal{C}$$

Wähle einen Repräsentanten aus jeder Äquivalenzkl.

$\mathcal{C}_{sk}$ $\qquad$ $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}_{sk}$: alle diese Repräsentanten

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{sk}}(X, X') := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X').$$

ist (ein) **Skelett** von $\mathcal{C}$.

Kanonischer Inklusionsfunktor $I: \mathcal{C}_{sk} \longrightarrow \mathcal{C}$ ist eine Äquivalenz.

Unterbsp:

$\mathcal{C} = \mathrm{fSets}$: endliche Mengen

$\mathcal{C}_{sk}$ hat Objekte $\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \ldots$

Unterbsp:

$\mathcal{D} = \mathrm{fdVec}_k$: endlich-dim. VR $/k$

$\mathcal{D}_{sk}$ hat Objekte k^n, $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Mat_k $\qquad$ $\mathrm{ob}(\mathrm{Mat}_k) := \mathbb{N}_0$.

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mat}_k}(n, m) := \mathrm{Mat}_{m \times n}(k)$$

Komposition : Matrixmultiplikation

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{2\times 1}(k)"] \arrow[d] & 2 \\ 5 & \end{tikzcd}$$

Zusammenfassung der Linearen Algebra I:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mat}_K & \longrightarrow & \mathrm{fd\,Vec}_K \\ n & \longmapsto & K^n \\ \text{Matrix } A \big\downarrow & & \big\downarrow A\cdot \\ m & \longmapsto & K^m \end{array}$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Der Funktor

aus Beispiel (a)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mat}_K & \longrightarrow & \mathcal{D}_{sk} \\ n & \longmapsto & K^n \end{array}$$

ist sogar ein Isomorphismus.

(c) X topologischer Raum, $x \in X$. Der Inklusionsfunktor

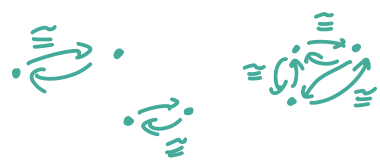
$\mathrm{ob}\,\Pi(X) = X$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x) & \longrightarrow & \Pi(X) \\ * & \longmapsto & x \end{array}$$

ist volltreu $\left(\mathrm{Hom}_{\pi_1(X,x)}(*,*) = \pi_1(X,x) = \mathrm{Hom}_{\Pi(X)}(x,x)\right)$.

Er ist genau dann wesentlich surjektiv, wenn X wegzusammenhängend ist.

(d) $\mathcal{C}$ eine Menge mit einer Äquivalenzrelation (aufgefasst als Kategorie)



$\mathcal{D}$ Quotientenmenge, aufgefasst als diskrete Kategorie

Die Quotientenabb. definiert eine Äquivalenz

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

$\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \dots$

(e) Noch einmal $\mathcal{C} = \text{fSets}$, $\mathcal{C}_{sk}$ wie in (a)

$I : \mathcal{C}_{sk} \hookrightarrow \mathcal{C}$ Inklusion.

Wähle zu jeder endlichen Menge X einen Iso.

$$\eta_X : I\{1, \dots, |X|\} \xrightarrow{\cong} X$$

Definiere

$$\mathcal{C}_{sk} \xleftarrow{G} \mathcal{C}$$

$$\begin{tikzcd}
\{1, \dots, |X|\} \arrow[d, "I^{-1}(\eta_Y^{-1} \circ f \circ \eta_X)"'] & X \arrow[l, mapsto] \arrow[d, "f"] \\
\{1, \dots, |Y|\} & Y \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Das ist ein Funktor, sogar Äquivalenz [...].

i.A. $I \circ G(X) \neq X$, nur $I \circ G(X) \cong X$.

Entsprechend i.A. $I \circ G(f) \neq f$, aber:

$$\begin{tikzcd}
F & \underline{I \circ G}(X) \arrow[r, "\cong", "\eta_X"'] \arrow[d, "\eta_Y^{-1} \circ f \circ \eta_X = I \circ G(f)"'] & X \arrow[d, "f"] & \mathrm{Id} \\
F & \underline{I \circ G}(Y) \arrow[r, "\cong", "\eta_Y"'] & Y & \mathrm{Id}
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Wollen wir Äquivalenz symmetrisch definieren, brauchen wir natürliche Trafos. Ähnlich wie es

top. Räume	stetige Abb.	Homotopien

gibt, gibt es:

Kategorien	Funktoren	natürliche Trafos

5. Def.: Seien $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}$ zwei Funktoren.

Eine natürliche Trafo $\alpha: F \rightsquigarrow G$ besteht aus je einem Morphismus $\alpha_X: FX \longrightarrow GX$ in $\mathcal{D}$, für jedes Objekt X aus $\mathcal{C}$, derart, dass

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & GX \arrow[d, "G(f)"] \\ FY \arrow[r, "\alpha_Y"'] & GY \end{tikzcd}$$

kommutiert für jedes $f: X \to Y$ in $\mathcal{C}$.

Ein natürlicher Isomorphismus ist eine natürliche Trafo α, deren sämtliche Komponenten α_X Isos sind.

6. Notiz & Def.: Wir erhalten so eine Kategorie $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ mit Objekten: Funktoren $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$

Morphismen: natürliche Trafos

7. Beispiele

(a) $\mathcal{P}: \mathrm{Sets} \longrightarrow \mathrm{Sets}$, $X \longmapsto \mathcal{P}(X)$ — K1, Bsp. 7 (g)

$\mathrm{Id}: \mathrm{Sets} \longrightarrow \mathrm{Sets}$

$\alpha: \mathrm{Id} \rightsquigarrow \mathcal{P}$

$\alpha_X: X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, $x \longmapsto \{x\}$

natürlich:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{P}(X) \ni A \arrow[d, "\mathcal{P}(f)"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"] & \mathcal{P}(Y) \ni f(A) \end{tikzcd}$$

$x \longmapsto \{x\}$

$f(x) \longmapsto \{f(x)\}$

(b) $\mathrm{Vec}_k \overset{\mathrm{Id}}{\underset{(\;)^{**}}{\rightrightarrows}} \mathrm{Vec}_k$

↖ Bidualfunktor $\left(V^* = \mathrm{Hom}_k(V,k) \right)$

$\alpha : \mathrm{Id} \rightsquigarrow (\;)^{**}$

$\alpha_V : V \longrightarrow V^{**}$

$\qquad v \longmapsto (\varphi \longmapsto \varphi(v))$

natürlich:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[r, "\alpha_W"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

$v \longmapsto (\varphi \longmapsto \varphi(v))$

$\omega \mapsto \omega \circ f^*$

$(\varphi \mapsto \varphi(v)) \circ f^*$

$\|$

$f(v) \longmapsto (\psi \mapsto \psi(f(v)))$

$$\boxed{\begin{aligned} (\varphi \mapsto \varphi(v)) \circ f^* : \; & W^* \longrightarrow k \\ & \psi \mapsto f^*\psi = \psi \circ f \mapsto \psi \circ f(v) \end{aligned}}$$

(c) GL_n: $\quad \mathrm{Fields} \longrightarrow \mathrm{Groups}$

$$\begin{array}{ccc} k & \longmapsto & GL_n(k) \\ \cap\! | & & \cap\! | \\ K & \longmapsto & GL_n(K) \end{array}$$

$(\;)^*$: $\quad \mathrm{Fields} \longrightarrow \mathrm{Groups}$

$$\begin{array}{ccc} k & \longmapsto & k^* \\ \cap\! | & & \cap\! | \\ K & \longmapsto & K^* \end{array}$$

$\det : GL_n \rightsquigarrow (\;)^*$ ist eine natürliche Trafo.

8. Def.: Zwei Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sind äquivalent, wenn es Funktoren $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ und natürliche Isomorphismen

$$\mu: \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \overset{\cong}{\rightsquigarrow} G \circ F$$
$$\eta: F \circ G \overset{\cong}{\rightsquigarrow} \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$$

9. Satz: Diese Def. ist äquivalent zur Def. aus Def. 2.

Beweis:

($\Leftarrow$) Sei F volltreu & wesentlich surjektiv.

Wähle für jedes Objekt Y aus $\mathcal{D}$ ein Objekt $G(Y)$ aus $\mathcal{C}$ und einen Iso

$$\eta_Y : FG(Y) \xrightarrow{\cong} Y.$$

(Das ist möglich, da F wesentlich surjektiv.)

Das definiert G auf Objekten.

$$G\left(\begin{array}{c} Y_1 \\ g \downarrow \\ Y_2 \end{array} \right) := f, \text{ sodass } F(f) = \eta_{Y_2}^{-1} \circ g \circ \eta_{Y_1}$$

$$\begin{tikzcd} FG(Y_1) \arrow[r, "\cong", "\eta_{Y_1}"'] \arrow[d, dashed] & Y_1 \arrow[d, "g"] \\ FG(Y_2) \arrow[r, "\cong", "\eta_{Y_2}"'] & Y_2 \end{tikzcd}$$

Das definiert $G(g)$, da F volltreu.

G Funktor:

$$G(\mathrm{id}_Y) = f, \quad \text{sodass } F(f) = \eta_Y^{-1} \circ \mathrm{id}_Y \circ \eta_Y = \mathrm{id}_{FG(Y)}$$

Auch $F(\mathrm{id}_{GY}) = \mathrm{id}_{FG(Y)}$.

Da F treu, folgt $f = \mathrm{id}_{GY}$.

injektiv auf Morphismenmengen

$G(g_2 \circ g_1) = f$, sodass $F(f) = \eta_{Y_3}^{-1} \circ g_2 \circ g_1 \circ \eta_{Y_1}$

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[d, "g_1"'] \\ Y_2 \arrow[d, "g_2"'] \\ Y_3 \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\eta_{Y_3}^{-1} \circ g_2 \circ \eta_{Y_2}} \circ \underbrace{\eta_{Y_2}^{-1} \circ g_1 \circ \eta_{Y_1}} \\ &= FG(g_2) \circ FG(g_1) \\ &= F(G(g_2) \circ G(g_1)) \end{aligned}$$

Wieder folgt, da F treu:

$$G(g_2 \circ g_1) = G(g_2) \circ G(g_1)$$

η natürlicher Iso. ✓ (siehe Diagramm oben)

Konstruktion von μ:

Betrachte $FGF(X) \xrightarrow[\cong]{\eta_{FX}} F(X)$

Da F voll, $\exists\ GF(X) \xleftarrow{\mu_X} X$ mit $F(\mu_X) = \eta_{FX}^{-1}$

μ_X ist natürlich:

zz:
$$\begin{tikzcd} GFX_1 \arrow[d, "GF(f)"'] & X_1 \arrow[l, "\mu_{X_1}"'] \arrow[d, "f"] \\ GFX_2 & X_2 \arrow[l, "\mu_{X_2}"] \end{tikzcd}$$
kommutiert.

da F treu

vzz:
$$\begin{tikzcd} FGFX_1 \arrow[d, "FGF(f)"'] & FX_1 \arrow[l, "F\mu_{X_1}"'] \arrow[d, "Ff"] \\ FGFX_2 & FX_2 \arrow[l, "F\mu_{X_2}"] \end{tikzcd}$$
kommutiert.

äquivalent:
$$\begin{tikzcd} FGFX_1 \arrow[d, "FGF(f)"'] & FX_1 \arrow[l, "\eta_{FX_1}^{-1}"', "\cong"] \arrow[d, "Ff"] \\ FGFX_2 & FX_2 \arrow[l, "\eta_{FX_2}^{-1}", "\cong"'] \end{tikzcd}$$
kommutiert.

Das kommutiert, da η natürlich.

($\Longrightarrow$) Seien F, G, μ, η gegeben.

$$\mu: \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \overset{\cong}{\rightsquigarrow} G \circ F$$
$$\eta: F \circ G \overset{\cong}{\rightsquigarrow} \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$$

F wesentlich surjektiv: für $Y \in \mathrm{ob}\,\mathcal{D}$

$$F(GY) \cong Y \qquad (\text{via } \eta_Y)$$

F treu: Sei $F(f_1) = F(f_2)$.

Dann ist auch $GF(f_1) = GF(f_2)$.

Betrachte μ:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\cong", "\mu_{X_1}"'] \arrow[d, "f_i"'] & GF(X_1) \arrow[d, "GF(f_i)"] \\
X_2 \arrow[r, "\mu_{X_2}", "\cong"'] & GF(X_2)
\end{tikzcd}$$

Offenbar f_i eindeutig festgelegt durch $GF(f_i)$. Also $f_1 = f_2$.

F voll: Sei $g: FX_1 \longrightarrow FX_2$ Morphismus in $\mathcal{D}$.

surjektiv auf Morphismenmengen

$$\begin{tikzcd}
FX_1 \arrow[d, "\eta_{FX_1}^{-1} = F(\mu_{X_1})"', "\cong"] \arrow[dr, equal] & \\
FGFX_1 \arrow[r, "\cong", "\eta_{FX_1}"'] \arrow[d, "FG(g)"'] & FX_1 \arrow[d, "g"] \\
FGFX_2 \arrow[r, "\cong", "\eta_{FX_2}"'] \arrow[d, "\eta_{FX_2} = F(\mu_{X_2}^{-1})"', "\cong"] & FX_2 \arrow[dl, equal] \\
FX_2 &
\end{tikzcd}$$

Also ist
$$g = F(\mu_{X_2}^{-1}) \circ FG(g) \circ F(\mu_{X_1})$$
$$= F(\mu_{X_2}^{-1} \circ G(g) \circ \mu_{X_1})$$

$\square$