K2: Was tun ohne Elemente?

Sets	allgemeine Kategorie
Bijektion	Isomorphismus
injektive Abb.	Monomorphismus
surjektive Abb.	Epimorphismus
$\emptyset$	Anfangsobjekt 0
Einpunktmenge ⇝ $*$	Endobjekt 1
$x \in S$	$\begin{cases} 1 \xrightarrow{x} S \\ X \xrightarrow{x} S \end{cases}$

1. Def.: Ein Morphismus $X \xrightarrow{i} Y$ ist ein Monomorphismus, falls für beliebige Morphismen $T \overset{t_1}{\underset{t_2}{\rightrightarrows}} X$ gilt:

$$i \circ t_1 = i \circ t_2 \implies t_1 = t_2$$

Ein Morphismus $X \xrightarrow{q} Y$ ist ein Epimorphismus, falls für beliebige Morphismen $Y \overset{t_1}{\underset{t_2}{\rightrightarrows}} T$ gilt:

$$t_1 \circ q = t_2 \circ q \implies t_1 = t_2$$

Ein spaltender Monomorphismus ist ein Morphismus i, für den ein Morphismus s mit $s \circ i = id$ existiert.

Ein spaltender Epimorphismus ist ein Morphismus q, für den ein Morphismus t mit $q \circ t = id$ existiert.

2. Notiz: (a) Jeder spaltende Mono ist ein Mono.
(b) Jeder spaltende Epi ist ein Epi.
(c) Jeder Iso ist (spaltender) Mono & Epi.

3. Beispiele

	Mono	Epi
Sets	injektive Abb.	surjektive Abb.
Top	injektive Abb.	surjektive Abb.
Ab	injektive Abb.	surjektive Abb.
cRings	injektive Abb.	?
eine partiell geordnete Menge	alle Morphismen (nur id spaltet)	alle Morphismen (nur id spaltet)

cRings: kommutative Ringe & Ringhomomorphismen

zu Sets: spaltende Monomorphismen sind injektive Abb. $X \xrightarrow{i} Y$ mit $X \neq \emptyset$ falls $Y \neq \emptyset$.
spaltende Epimorphismen sind alle surjektiven Abb. (Auswahlaxiom)

zu Top:

Sei $X \xrightarrow{i} Y$ Mono. Betrachte $x_1, x_2 \in X$ mit $i(x_1) = i(x_2)$.

Sie definieren stetige Abb. $* \underset{f_{x_2}}{\overset{f_{x_1}}{\rightrightarrows}} X$.

Offenbar $i \circ f_{x_1} = i \circ f_{x_2}$. Da i Mono, folgt $f_{x_1} = f_{x_2}$.

Also $x_1 = x_2$.

Sei umgekehrt $X \xrightarrow{i} Y$ injektiv,

$T \underset{t_2}{\overset{t_1}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{i} Y$ gegeben mit $i \circ t_1 = i \circ t_2$.

Dann ist auch $i \circ t_1 = i \circ t_2$ in Sets.

(Pedantische Notation: U: Top $\longrightarrow$ Sets Vergissf.

Es ist $U(i \circ t_1) = U(i \circ t_2)$,

also $U(i) \circ U(t_1) = U(i) \circ U(t_2)$.)

Da i injektiv, folgt $t_1 = t_2$ in Sets.

Also auch $t_1 = t_2$ in Top.

//

Viele Monomorphismen spalten nicht:

z.B. $S^1 \xrightarrow{i} D^2$

Es gibt keine stetige Abb.

$S^1 \xleftarrow{r} D^2$ mit $r \circ i = id$

(Brouwerscher Fixpunktsatz). (Beweis: Wende π_1 an.)

//

Sei $X \xrightarrow{q} Y$ Epi. Betrachte $T := Y/q(X)$.

$t_1 : Y \longrightarrow T$ Quotientenabb.

$t_2 : Y \longrightarrow T$ konstant auf den Punkt $[q(X)]$

Offenbar $t_1 \circ q = t_2 \circ q$, also $t_1 = t_2$. Also $T = \{[q(X)]\}$, also $q(X) = Y$, also q surjektiv.

(surj. $\Rightarrow$ Epi) analog zu (inj. $\Rightarrow$ Mono)

// Viele Epimorphismen spalten nicht:

z.B.
$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \\ \text{exp} \downarrow \\ S^1 \end{array}$$

(Beweis: Wende π_1 an.)

zu Ab (abelsche Gruppen):

(Mono $\Rightarrow$ inj.) Nutze, dass ein Element $x \in X$ genau einem Morphismus $\mathbb{Z} \longrightarrow X$, $1 \longmapsto x$ entspricht.

$(* \longrightarrow X)$

(inj. $\Leftarrow$ Mono) wie bei Top

(Epi $\Rightarrow$ surj.) Betrachte wieder $T := Y/\mathrm{im}(q)$,

$t_1 : Y \longrightarrow T$ Quotientenabb.

$t_2 : Y \longrightarrow T$ Nullhomomorphismus zu c Rings:

(Mono $\Rightarrow$ inj.) Nutze, dass ein Element $x \in X$ genau einem Ringhomorphismus $\mathbb{Z}[t] \longrightarrow X$, $t \longmapsto x$ entspricht

Polynomring

$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q}$ ist ein Epimorphismus

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \underset{t_2}{\overset{t_1}{\rightrightarrows}} T$$

Ist $i \circ t_1 = i \circ t_2$, so ist $t_1(a) = t_2(a)$ $\forall a \in \mathbb{Z}$,

aber auch $t_1\left(\frac{1}{a}\right) = 1/t_1(a)$ (t_1 Ringhomo)

$$= 1/t_2(a)$$

$$= t_2\left(\frac{1}{a}\right).$$

Es folgt ... : $t_1 = t_2$.

4. Notiz: Funktoren werfen Isomorphismen auf Isomorphismen,

spaltende Monos auf spaltende Monos,

spaltende Epis auf spaltende Epis

⚠ aber i.A. nicht beliebige Monos auf Monos,

nicht beliebige Epis auf Epis.

(Beweis: $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ Funktor, f in $\mathcal{C}$ Iso.
Nach Def. $\exists\, g$ in $\mathcal{C}$ mit $f \circ g = id$ und $g \circ f = id$.
Nach Def. eines Funktors ist

$$\begin{array}{ccc} F(f \circ g) & = & F(f) \circ F(g) \\ \| & & \\ F(id) & = & id, \end{array}$$

und analog $\quad F(g) \circ F(f) = id.$

Also ist $F(f)$ Iso mit Inversem $F(g)$.

usw.)

zu ⚠ :

$\pi_1 : \mathrm{Top}_* \longrightarrow \mathrm{Ab}$

$$\begin{array}{rcccl} & S^1 & \longmapsto & \mathbb{Z} & \\ \text{Mono} & \downarrow & & \downarrow & \text{kein Mono} \\ & D^2 & \longmapsto & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} & \mathbb{R} & \longmapsto & 0 & \\ \text{Epi} & \downarrow \exp & & \downarrow & \text{kein Epi} \\ & S^1 & \longmapsto & \mathbb{Z} & \end{array}$$

Vergiss: $\mathrm{cRings} \longrightarrow \mathrm{Ab}$

$$\begin{array}{rcccl} & \mathbb{Z} & \longmapsto & \mathbb{Z} & \\ \text{Epi} & \downarrow & & \downarrow & \text{kein Epi} \\ & \mathbb{Q} & \longmapsto & \mathbb{Q} & \end{array}$$

5. Def.: Eine Kategorie ist ausgewogen (engl.: balanced), falls jeder Morphismus, der Mono- und Epimorphismus ist, ein Isomorphismus ist.

6. Beispiele:

Sets ✓

Top × (bijektiv $\not\Rightarrow$ Iso)

Ab ✓

cRings × $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ist Epi & Mono, aber nicht Iso

eine partiell geordnete Menge ×

7. Def: Ein Anfangsobjekt / initiales Objekt ist ein Objekt $0 \in \mathcal{C}$ mit folgender (universeller) Eigenschaft:

$$\forall X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}: \quad \exists!\ 0 \longrightarrow X$$

Ein Endobjekt / terminales Objekt ist ein Objekt $1 \in \mathcal{C}$ mit folgender (universeller) Eigenschaft:

$$\forall X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}: \quad \exists!\ X \longrightarrow 1$$

Ein Nullobjekt ist ein Anfangsobjekt, das auch Endobjekt ist.

8. Beispiele:

	Anfangsobjekt	Endobjekt
Sets	$\emptyset$	$\ast \cong \{0\} \cong \{1\} \cong \{?\}$
Top	$\emptyset$	$\ast$
$\mathrm{Top}_\ast$	$\ast \to \ast$	$\ast \to \ast$
$[X \downarrow \mathcal{C}]$	$X \xrightarrow{\mathrm{id}} X$, $\quad X \xrightarrow{f} Y$, $\quad X \dashrightarrow Y$	
Ab	0	0
cRings	$\mathbb{Z}$	0
eine partiell geordnete Menge	ein kleinstes Element (falls es $\exists$)	ein größtes Element (falls es $\exists$)

9. Notiz:

(a) Anfangs- und Endobjekte müssen nicht existieren.

(b) Wenn sie existieren, sind sie bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig.

(Zu b: Seien O und O' zwei Anfangsobjekte.

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r, "f", "\exists!"'] \arrow[rr, bend left, "\exists!"] & O' \arrow[r, "g", "\exists!"'] & O \end{tikzcd}$$

$\exists!$, also $g \circ f = \mathrm{id}_O$

Analog $f \circ g = \mathrm{id}_{O'}$.)

10. Def: $\mathcal{C}$ Kategorie, $S \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C}$

Ein **globales Element** von S ist ein Morphismus $1 \longrightarrow S$ (falls 1 existiert).

Ein **verallgemeinertes Element** von S ist ein beliebiger Morphismus $X \longrightarrow S$.

11. Beispiel:

Kategorie der affinen Schemata

$$\mathrm{affSchemes} := (\mathrm{cRings})^{op}$$

Für einen Ring A schreiben wir

$\mathrm{Spec}\, A$ für A aufgefasst als Objekt von affSchemes

Verallgemeinertes Element von $\mathrm{Spec}\, A$

$=$ Morphismus $\mathrm{Spec}\, R \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$ für einen kommutativen Ring A

$\hat{=}$ Ringhomomorphismus $A \longrightarrow R$

"R-wertige Punkte von $\mathrm{Spec}\, A$"