D5: Gruppen(ko)homologie

G eine Gruppe

1. Def.: Der Gruppenring $\mathbb{Z}G$ oder $\mathbb{Z}[G]$ von G ist der eindeutige Ring, der als abelsche Gruppe gegeben ist durch

$$\mathbb{Z}G := \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z} \cdot e_g$$

und dessen Multiplikation $e_g \cdot e_h := e_{g \cdot h}$ erfüllt $(\forall g, h \in G)$.

Notiz: $1 := e_{\text{neutrales Element von } G}$ ist das Einselement von $\mathbb{Z}G$

⚠ Ist G nicht abelsch, ist $\mathbb{Z}G$ nicht kommutativ.

2. Beispiele

(a) $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \cong \mathbb{Z}[x, x^{-1}] \quad \left(= \mathbb{Z}[x,y] / (xy-1) \right)$

$e_n \;\widehat{=}\; x^n$

(b) $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/n] \cong \mathbb{Z}[x] / (x^n - 1)$

$e_{\bar{n}} \;\widehat{=}\; x^n$

3. Def.: Ein G-Modul ist ein $\mathbb{Z}G$-Linksmodul.

Kategorie $_{\mathbb{Z}G}\mathrm{Mod} = \begin{cases} \text{G-Moduln} \\ \text{und} \\ \text{Links-}\mathbb{Z}G\text{-lineare} \\ \text{Abb.} \end{cases}$

Alternativ können wir G-Modul A auffassen als abelsche Gruppe A mit einer $\mathbb{Z}$-linearen Links-G-Operation.

suggestive Notation: $e_g \cdot a =: g.a$ für $a \in A$

Ein G-Modul A ist trivial, falls $g.a = a$ für alle $g \in G$ und alle $a \in A$.

4. Beispiel: Der Ringhomomorphismus

$$\varepsilon : \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$e_g \longmapsto 1$$

erlaubt uns, $\mathbb{Z}$ als trivialen $\mathbb{Z}G$-$\mathbb{Z}G$-Bimodul aufzufassen.

(Also: für $g \in G$, $n \in \mathbb{Z}$ ist $g.n = n = n.g$)

5. Def.: Die invariante Untergruppe eines G-Moduls A ist $A^G := \{a \in A \mid g.a = a\}$.

Die koinvariante Untergruppe ist

$$A_G := A \,/\, \text{Untergruppe, die von } g.a - a \text{ (für alle } a \in A, g \in G) \text{ erzeugt wird}$$

6. Notiz: $(\ )^G$ & $(\ )_G$ definieren Funktoren

$$_{\mathbb{Z}G}\mathrm{Mod} \longrightarrow \mathrm{Ab}$$

7. Satz: Wir haben natürliche Isomorphismen

$\mathbb{Z}$ als trivialen Links-$\mathbb{Z}G$-Modul

$$(\ )^G \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, -)$$
$$(\ )_G \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} -$$

$\mathbb{Z}$ als trivialen Rechts-$\mathbb{Z}G$-Modul

Beweis: siehe Blatt 9, Aufgabe 4 (a) & (b)

A^G:
$$\begin{aligned} A^G &\xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A) \\ a &\longmapsto (n \mapsto n\cdot a) \\ f(1) &\longleftarrow f \end{aligned}$$

prüfe:
- wohldef.
- inverse
- natürlich

A_G:
$$\begin{aligned} A_G &\xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \\ \overline{a} &\longmapsto 1 \otimes a \\ \overline{n\cdot a} &\longleftarrow n \otimes a \end{aligned}$$

(eindeutige $\mathbb{Z}$-lineare Abb. mit dieser Eigenschaft)

alternativ:

nicht-kommutative Version von M3, Satz 4 (a)

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \cong \mathbb{Z}G/\mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \cong A/\mathfrak{a}\cdot A \cong A_G$$

mit $\mathfrak{a} := \ker(\varepsilon)$ (beidseitiges Ideal)
$= (e_g - 1 \mid g \in G)$

$\square$

7. Notiz: Wir haben zwei Adjunktionen

$$\begin{tikzcd} {}_{\mathbb{Z}G}\mathrm{Mod} \arrow[r, shift left=2, "(\ )_G"] \arrow[r, shift right=2, "(\ )^G"'] & \mathrm{Ab} \arrow[l, "\mathrm{Triv}"'] \end{tikzcd},$$

wobei Triv eine abelsche Gruppe auffasst als trivialen G-Modul.

(Folgt aus KG, Bsp. 3d und

$$\mathrm{Triv} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\underbrace{\mathbb{Z}}_{\substack{\text{trivialer Rechts-}\\ \mathbb{Z}G\text{-Modul}}}, -) \cong \underbrace{\mathbb{Z}}_{\substack{\text{trivialer Links-}\\ \mathbb{Z}G\text{-Modul}}} \otimes_{\mathbb{Z}} - .$$

modulo Links & Rechts vertauschen.

einfacher: direkt nachrechnen.)

8. Def.: Die Homologiegruppen von G mit Koeffizienten in einem G-Modul A

projektive Auflösung? projektive Auflösung?

$$H_i(G;A) := \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$$
$$\left(= L_i\left((-)_G\right)\right)$$

Die Kohomologiegruppen von G mit Koeffizienten in einem G-Modul A

$$H^i(G;A) := \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$$
$$\left(= R^i\left((-)^G\right)\right)$$

projektive Aufl.? injektive Auflösung?

Per Definition ist also

$$H_0(G;A) \cong A_G \cong \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} A$$
$$H^0(G;A) \cong A^G \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$$

9. Beispiele

(a) $\boxed{G = 1}$ — $\mathbb{Z}G = \mathbb{Z}$, $A^G \cong Id$, $A_G \cong Id$

$$H_0(G;A) \cong H^0(G;A) \cong A$$
$$H_i(G, A) \cong H^i(G;A) = 0 \quad \forall i \geq 1$$

(z.B. da Id exakter Funktor)

(b) $\boxed{G = \mathbb{Z}/n}$ $\quad \mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}[\bar{x}] := \mathbb{Z}[x]/_{x^n - 1}$

Wir haben freie Auflösung von $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}G$-Modul:

$$\boxed{\ldots \xrightarrow{N\cdot} \mathbb{Z}[\bar{x}] \xrightarrow{(\bar{x}-1)\cdot} \mathbb{Z}[\bar{x}] \xrightarrow{N\cdot} \mathbb{Z}[\bar{x}] \xrightarrow{(\bar{x}-1)\cdot} \mathbb{Z}[\bar{x}]} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$
$$\bar{x} \longmapsto 1$$

mit $N := \sum_{i=0}^{n-1} \bar{x}^i$.

$$\ker(\cdot(\bar{x}-1)) = \left\{ \sum a_i \bar{x}^i \;\middle|\; a_i = a_{i-1} \right\} \qquad (a_{-1} = a_{n-1})$$
$$= \left\{ a \sum_{i=0}^{n-1} \bar{x}^i \;\middle|\; a \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$= \left\{ a \cdot N \;\middle|\; a \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\ker \varepsilon = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n-1} a_i = 0 \right\}$$
$$\overset{\dots}{=} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i-1} - b_i) x^i \;\middle|\; b_i \text{ beliebig} \right\} \qquad (b_{-1} := b_{n-1})$$
$$= \left\{ \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \right) \cdot (\bar{x}-1) \;\middle|\; b_i \text{ beliebig} \right\}$$
$$= (\bar{x}-1) \qquad (\text{von } \bar{x}-1 \text{ erzeugtes Ideal})$$

$$\ker N = \dots = (\bar{x}-1)$$

$H_i(G;A)$: Wende $- \otimes_{\mathbb{Z}[\bar{x}]} A$ auf $\boxed{\text{Auflösung}}$ an:

$$\boxed{\dots \xrightarrow{N\cdot} A \xrightarrow{(\bar{x}-1)\cdot} A \xrightarrow{N\cdot} A \xrightarrow{(\bar{x}-1)\cdot} A} \;\Big)\; H_i$$

$$A^G / N(A) \qquad \ker N / (\bar{x}-\mathrm{id})(A) \qquad A^G / N(A) \qquad A / (\bar{x}-\mathrm{id})(A) \cong A_G \checkmark$$

Also:
$$H_i(\mathbb{Z}/n; A) = \begin{cases} A_{\mathbb{Z}/n} & i = 0 \\ A^{\mathbb{Z}/n} / N(A) & i > 0 \text{ ungerade} \\ \ker(N: A \to A) / (\bar{x}-\mathrm{id})(A) & i > 0 \text{ gerade} \end{cases}$$

(Es folgt insbesondere:
$\mathbb{Z}$ kann keine projektive Auflösung endlicher Länge als $\mathbb{Z}G$-Modul haben.)

$H^i(G; A)$: Wende $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-, A)$ auf $\boxed{\text{Auflösung}}$ an:

$$\boxed{\cdots \xleftarrow{N\cdot} A \xleftarrow{(x-1)\cdot} A \xleftarrow{N\cdot} A \xleftarrow{(x-1)\cdot} A}$$

Somit:

$$H^i(\mathbb{Z}/n, A) = \begin{cases} A^{\mathbb{Z}/n} & i = 0 \\ \ker(N: A \to A) / (x - \mathrm{id})A & i > 0 \text{ ungerade} \\ A^{\mathbb{Z}/n} / N(A) & i > 0 \text{ gerade} \end{cases}$$

Übung: Berechne explizit $H^*(\mathbb{Z}/n; \mathbb{Z})$