D4: Ext

R Ring

1. (vorläufige) Def.: $\mathrm{Ext}^i_R(-,-) := R^i\mathrm{Hom}_R(-,-)$

Zwei Interpretationen:

(a) Für jeden R-Modul M ist $\mathrm{Ext}^i_R(M,-) := R^i\mathrm{Hom}_R(M,-)$

Zur Berechnung von $\mathrm{Ext}^i_R(M,N)$ wählen wir eine injektive Auflösung $N \longrightarrow I_\bullet$.

Dann ist
$$\mathrm{Ext}^i_R(M,N) = H_{-i}(\mathrm{Hom}_R(M, I_\bullet))$$

(b) Für jeden R-Modul N ist $\mathrm{Ext}^i_R(-,N) := R^i\mathrm{Hom}_R(-,N)$
$$\mathrm{Hom}_R(-,N) : \mathrm{Mod}_R^{op} \longrightarrow Ab$$

Zur Berechnung von $\mathrm{Ext}^i_R(M,N)$ wählen wir eine injektive Auflösung von M in Mod_R^{op}, also eine projektive Auflösung $P_\bullet \longrightarrow M$ in Mod_R. Dann ist

in Graden ≥ 0

$$\mathrm{Ext}^i_R(M,N) = H_{-i}(\underbrace{\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, N)}_{\text{in Graden } \leq 0\,!})$$

2. Satz: Die beiden Interpretationen stimmen überein, also $(R^i\mathrm{Hom}(M,-))(N) \cong (R^i\mathrm{Hom}(-,N))(M)$.

Beweis: wieder Weibel §2.7 $\square$

3. Satz.:

(a) $\mathrm{Ext}^i_R(M,N) = 0$ falls M projektiv oder N injektiv.

(b) $\mathrm{Ext}^i_R(\bigoplus_j M_j, N) \cong \prod_j \mathrm{Ext}^i_R(M_j, N)$

$\mathrm{Ext}^i_R(M, \prod_j N_j) \cong \prod_j \mathrm{Ext}^i_R(M, N_j)$

Beweis:

a: wie DZ, Satz 3.

b: wie DZ, Satz 3 — beachte:

$$\mathrm{Hom}_R(\oplus M_j, N) \cong \prod_j \mathrm{Hom}(M_j, N) \qquad (\text{UE von } \oplus_j)$$
$$\mathrm{Hom}_R(M, \prod_j N_j) \cong \prod_j \mathrm{Hom}(M, N_j) \qquad (\text{UE von } \prod_j)$$

Summen projektiver Objekte sind projektiv.
Produkte injektiver Objekte sind injektiv. $\}$ i.A.

Summen exakter Sequenzen sind exakt.
Produkte exakter Sequenzen sind exakt. $\}$ Mod_R

$\square$

4. Satz (Ext über HIR)

Über jedem HIR R gilt:

(a) $\quad \mathrm{Ext}^i_R(M, N) = 0 \qquad \forall i \geq 2$

(b) $\quad \mathrm{Ext}^1_R(R/d, N) = N/dN \qquad \forall d \in R \setminus \{0\}$

Beweis:

a: Analog zu DZ, Satz 4 — benutze kurze freie Auflösung von M.

b:
$$\boxed{R \xrightarrow{\cdot d} R} \twoheadrightarrow R/d$$

$\mathrm{Hom}(-, N)$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(R, N) & \xleftarrow{\cdot d} & \mathrm{Hom}_R(R, N) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ N & & N \\ \text{Grad } -1 & & \text{Grad } 0 \end{array}$$

$\underbrace{H_{-1}(\ldots)}$

$\mathrm{Ext}^1(M, N) = \mathrm{coker}(d)$

$\square$

5. Satz/Beispiel: $R = \mathbb{Z}$

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \text{ falls } A \text{ Torsionsgruppe}$$

Beweis:

Benutze injektive Auflösung $\mathbb{Z} \hookrightarrow \boxed{\underset{0}{\mathbb{Q}} \longrightarrow \underset{-1}{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}}$

$\big\downarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,-)$

$$\underbrace{\underset{0}{\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q})}}_{=0,} \longrightarrow \underset{-1}{\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$$

da A Torsionsgruppe.

$f: A \longrightarrow \mathbb{Q}$, $a \in A$

$n \cdot a = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$

$n \cdot f(a) = 0$, also $f(a) = 0$.

$\square$

Warum Ext?

6. Def.: $\mathcal{A}$ abelsche Kategorie; $A, B \in \operatorname{ob} \mathcal{A}$.

Eine Erweiterung (extension) von A durch B ist eine k.e.S. der Form

$$\xi: \quad 0 \longrightarrow B \longrightarrow X \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Zwei Erweiterungen ξ und ξ' von A durch B sind äquivalent, falls es einen Iso $X \xrightarrow{\cong} X'$ gibt derart, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{rccccccccc}
\xi: & 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & X & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \| & & \downarrow\cong & & \| & & \\
\xi': & 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Eine Erweiterung heißt spaltend, falls die k.e.S. spaltet.

7. Bsp.: In Ab sind

$$0 \to \mathbb{Z}/_3 \to \mathbb{Z}/_3 \oplus \mathbb{Z}/_3 \to \mathbb{Z}/_3 \to 0$$
$$0 \to \mathbb{Z}/_3 \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z}/_9 \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{Z}/_3 \to 0$$
$$0 \to \mathbb{Z}/_3 \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z}/_9 \xrightarrow{\cdot (-1)} \mathbb{Z}/_3 \to 0$$

drei nicht-äquivalente Erweiterungen von $\mathbb{Z}/_3$ durch $\mathbb{Z}/_3$.

Wir konstruieren eine Abb.

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Erweiterungen} \\ \text{von } A \text{ durch } B \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\Theta} \mathrm{Ext}^1(A, B)$$
$$\xi \longmapsto \partial_\xi(\mathrm{id}_B)$$

wie folgt:

Betrachte zu $\xi = (0 \longrightarrow B \xrightarrow{j} X \to A \to 0)$ mit $t: X \to B$

die von $\mathrm{Hom}(-, B)$ induzierte lange exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}(A,B) \to \mathrm{Hom}(X,B) \xrightarrow{j^*} \underset{\ni \,\mathrm{id}_B}{\mathrm{Hom}(B,B)} \xrightarrow{\partial_\xi} \underset{\ni\, \Theta(\xi)}{\mathrm{Ext}^1(A,B)}$$

Definiere wie angegeben $\Theta(\xi) := \partial_\xi(\mathrm{id}_B)$.

8. Satz: Für $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}_R$ induziert Θ eine Bijektion

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Erweiterungen} \\ \text{von } A \text{ durch } B \end{matrix} \right\} \Big/ \underset{\text{Äquivalenz}}{\sim} \xrightarrow{1:1} \mathrm{Ext}^1_R(A, B)$$

Die spaltende Erweiterung entspricht dabei der $0 \in \mathrm{Ext}^1_R(A, B)$.

9. Bemerkungen: Θ ist ein Gruppenisomorphismus bzgl. der „Baer-Summe" auf der Menge der Erweiterungen / Äquivalenz.

10. Beispiel: $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/n) \underset{\uparrow}{\cong} \mathbb{Z}/n\big/n \cong \mathbb{Z}/n$

Satz 4

Es gibt also laut Satz n verschiedene Erweiterungen
nicht-äquivalente
von $\mathbb{Z}/n$ durch $\mathbb{Z}/n$.

Übung: Ist $n = p$ eine Primzahl, so entspricht $0 \neq i \in \mathbb{Z}/p \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)$ der Erweiterung

$$0 \to \mathbb{Z}/p \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z}/p^2 \xrightarrow{\cdot i} \mathbb{Z}/p \to 0$$

(vgl. Beispiel 7).

Beweis:

Wir zeigen zuerst:

$$(\underset{\text{spaltet}}{\xi : 0 \to B \to X \to A \to 0}) \iff \partial_\xi(\mathrm{id}_B) = 0$$

($\Rightarrow$) Da ξ spaltet, spaltet auch j^* in $\mathrm{Hom}(\xi, B)$. Also ist $\mathrm{im}(j^*) = \ker(\partial_\xi)$ alles, also $\partial_\xi = 0$.

($\Leftarrow$) Exaktheit der Sequenz, in der ∂_ξ steht, impliziert: $\exists\, t \in \mathrm{Hom}(X, B)$: $j^*(t) = \mathrm{id}_B$, also $t \circ j = \mathrm{id}_B$.

Dieses t spaltet ξ (vgl. Blatt 13, Aufgabe 3). //

Konstruiere nun Umkehrabbildung

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Erweiterungen}\}/\sim & \longleftarrow & \mathrm{Ext}^1_R(A, B) \\ & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \xi_x & \longleftarrow\!\shortmid & x \end{array}$$

Fixiere dazu eine k.e.S.

$$0 \to K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} A \to 0$$

mit P projektiv. Betrachte die von $\mathrm{Hom}(-, B)$

induzierte lange exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}(A,B) \to \mathrm{Hom}(P,B) \to \mathrm{Hom}(K,B) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1(A,B) \to \underbrace{\mathrm{Ext}^1(P,B)}_{=0,\text{ da } P \text{ projektiv.}}$$

$x \in \mathrm{Ext}^1(A,B)$

Wähle ein Urbild $\beta \in \mathrm{Hom}(K,B)$ von x, also $\partial\beta = x$.
Definiere X als das folgend eingezeichnete Pushout:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\beta"'] & P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & X \arrow[r, "\binom{\pi}{0}"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

Definiere $X \to A$ als den durch π und 0 induzierten Morphismus.

Definiere ξ_x als die untere Zeile von $(*)$.

Prüfe:
- ξ_x ist exakt
- ξ_x ist bis auf Äquivalenz unabhängig von Wahl von β.
- $\Theta(\xi_x) = x$.
- $\xi_{\Theta(\xi)}$ ist äquivalent zu ξ.

[...] [...] [...]

$\square$