D3: Rechtsderivierte Funktoren

Injektive Auflösungen

$\mathcal{A}$ abelsche Kategorie

1. Def.: Eine Rechts-Auflösung eines Objekts M aus $\mathcal{A}$ ist ein Komplex $I_\bullet$ aus $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ mit $I_i = 0 \ \forall i > 0$ zusammen mit einem Morphismus $M \xrightarrow{\varepsilon} I_\bullet$

M aufgefasst als Komplex, der in Grad 0 konzentriert ist.

derart, dass

$$0 \to M \xrightarrow{\varepsilon} I_0 \to I_{-1} \to I_{-2} \to \dots$$

exakt ist.

Sie heißt injektiv, falls jedes I_i injektiv ist.

2. Def. & Satz: $\mathcal{A}$ besitzt genügend injektive Objekte, falls für jedes Objekt M aus $\mathcal{A}$ ein injektives Objekt I_0 mit einem Monomorphismus $M \longrightarrow I_0$ existiert. In diesem Fall besitzt jedes Objekt aus $\mathcal{A}$ eine injektive Auflösung.

3. Satz: Injektive Auflösungen sind bis auf Kettenhomotopieäquivalenz eindeutig bestimmt.

Sind $\left.\begin{array}{l} M \to I_\bullet \\ N \to J_\bullet \end{array}\right\}$ injektive Auflösungen, so

existiert für jeden Morphismus $f: M \to N$ ein $f_\bullet : I_\bullet \to J_\bullet$ derart, dass

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & I_\bullet \arrow[d, "f_\bullet"] \\ N \arrow[r] & J_\bullet \end{tikzcd}$$

kommutiert, und dieses $f_\bullet$ ist bis auf Homotopie eindeutig.

Beweis beider Sätze:

I injektiv in $\mathcal{A}$ $\iff$ I projektiv in $\mathcal{A}^{op}$

$M \longrightarrow I_\bullet$ injektive Auflösung in $\mathcal{A}$ $\iff$ $I_\bullet \longrightarrow M$ projektive Auflösung in $\mathcal{A}^{op}$

Also lassen sich Resultate aus D1 übertragen. $\square$

4. Satz: Es gibt genügend injektive R-Moduln, für jeden Ring R.

Beweis $R = \mathbb{Z}$:

Wir zeigen: für jede abelsche Gruppe A ist

$$A \xrightarrow{i} \prod_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$a \longmapsto (f(a))_{f: A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$$

ein Monomorphismus in eine injektive abelsche Gruppe.

- $\prod_{\dots} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist injektiv da divisibel (M5, Korollar 7).
- Sei $a \in A$, $a \neq 0$. Dann ist $i(a) \neq 0$:

$\{0, a, a+a, a+a+a, \dots, -a, -a-a, \dots\}$

Betrachte Untergruppen (a), die von a erzeugt wird.

Wähle einen Epimorphismus $(a) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m$ mit $m \neq 1$.

$a \longmapsto \bar{1}$

(Falls a endlicher Ordnung: $m = \operatorname{ord}(a)$ $\quad (a) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/m$

Falls a unendlicher Ordnung: wähle $m > 1$ beliebig $\quad (a) \cong \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m$)

Definiere

$$
\begin{aligned}
g\colon (a) &\twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\bar{i} &\longmapsto \overline{i/m} \\
a &\longmapsto \overline{1/m} \neq 0
\end{aligned}
$$

Da $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ injektiv, können wir g auf A fortsetzen.

$$
\begin{tikzcd}
(a) \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"'] & A \ni a \arrow[dl, dashed, "f"] \\
\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \ni \overline{\tfrac{1}{m}} \neq 0 &
\end{tikzcd}
$$

Also ist $(\dot{\iota}(a))_f = f(a) \neq 0$. $\square$

Beweisansatz für allgemeineres R:

Für jeden R-Modul M ist

$$
\begin{aligned}
M &\longrightarrow \prod_{\operatorname{Hom}_R(M,I)} I \\
m &\longmapsto (f(m))_{f\colon M \to I}
\end{aligned}
$$

mit $I := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ein Monomorphismus in einen injektiven R-Modul. [...] $\square$

Rechtsderivierte Funktoren

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ abelsch, $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ additiver Funktor

5. Konstruktive Def.:

$\mathcal{A}$ mit genügend injektiven Objekten

F linksexakt

Die rechtsderivierten Funktoren $R^i F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ sind wie folgt def.:

Wähle zu jedem Objekt X aus $\mathcal{A}$ eine injektive Auflösung $(I_\bullet(X), \varepsilon_X)$; zu jedem Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{A}$ ein $f_\bullet: I_\bullet(X) \longrightarrow I_\bullet(Y)$ wie in Satz 3. Definiere

$$(R^i F)(X) := H_{-i}(F I_\bullet(X))$$
$$(R^i F)(f) := H_{-i}(F f_\bullet \quad)$$

6. Satz:

(a) $R^i F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ist ein additiver Funktor

(b) $R^i F$ ist unabhängig von der Wahl der Auflösungen, bis auf (natürliche) Isomorphie.

(c) $R^0 F \cong F$ und $R^i F = 0 \quad \forall i < 0$.

(d) (Existenzberechtigung:)

Für jede k.e.S.

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{A}$$

passen die derivierten Funktoren in eine lange exakte Sequenz

$$
\begin{aligned}
0 \to FX \to FY \to FZ &\xrightarrow{\delta^1} \\
R^1FX \to R^1FY \to R^1FZ &\xrightarrow{\delta^2} \\
R^2FX \to R^2FY \to R^2FZ &\to \\
\dots &
\end{aligned}
$$

Beweis:

$F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ linksexakt $\iff$ $F^{op}: \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}^{op}$ rechtsexakt

$\mathcal{A}$ hat genügend injektive Objekte $\iff$ $\mathcal{A}^{op}$ hat genügend projektive Objekte

usw.

Also ist $R^iF = (L_i(F^{op}))^{op}$ und D1, Satz 8 lässt sich übertragen. $\square$