D2: Tor

R Ring

1. (vorläufige) Def.: $\mathrm{Tor}_i^R(-,-) := L_i(- \otimes_R -)$

Zwei Interpretationen:

(a) Für $M \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Mod}_R$ ist

$$\mathrm{Tor}_i^R(M,-) := L_i(\overbrace{M \otimes_R -}^{F}) : {}_R\mathrm{Mod} \longrightarrow \mathrm{Ab}$$

Zur Berechnung von $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$ wählen wir also eine projektive Auflösung $P_\bullet \to N$. Dann ist

$$\mathrm{Tor}_i^R(M,N) = H_i(M \otimes_R P_\bullet)$$

(b) Für $N \in \mathrm{ob}\,{}_R\mathrm{Mod}$ ist

$$\mathrm{Tor}_i^R(-,N) := L_i(- \otimes_R N) : \mathrm{Mod}_R \longrightarrow \mathrm{Ab}$$

Zur Berechnung von $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$ wählen wir also eine projektive Auflösung $P_\bullet \to M$. Dann ist

$$\mathrm{Tor}_i^R(M,N) = H_i(P_\bullet \otimes_R N)$$

2. Satz: Diese beiden Interpretationen stimmen überein; es ist also für jedes i

$$L_i(M \otimes_R -)(N) \cong L_i(- \otimes_R N)(M).$$

Beweis: Weibel §2.7 (besser verständlich als Spektralsequenz-Argument). $\square$

3. Satz:

(a) $\mathrm{Tor}_i^R(M, N) = 0 \quad \forall i \neq 0$ falls M flach oder N flach.

(b) $\mathrm{Tor}_i^R(\bigoplus_j M_j, N) \cong \bigoplus_j \mathrm{Tor}_i^R(M_j, N)$

$\mathrm{Tor}_i^R(M, \bigoplus_j N) \cong \bigoplus_j \mathrm{Tor}_i^R(M, N_j)$

(c) Falls R kommutativ ist, ist

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, N) \cong \mathrm{Tor}_i^R(N, M)$$

Beweis:

a: Sei M flach

explizit: Sei $P_\bullet \longrightarrow N$ projektive Auflösung.

Da M flach ist, ist

$$M \otimes_R P_\bullet \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow 0$$

exakt, hat also triviale Homologie.

abstrakt: $M \otimes_R -$ ist exakt, also ist $L_i(M \otimes_R -) = 0$ für alle $i \neq 0$ — siehe Übung 12.

b: Folgt aus expliziter Def., denn:

Sind $P_\bullet^{(j)} \longrightarrow M_j$ projektive Auflösungen, so ist $\bigoplus_j P_\bullet^{(j)} \longrightarrow \bigoplus_j M_j$ eine projektive Auflösung, und sowohl $- \otimes_R N$ als auch H_i sind mit $\bigoplus_j$ verträglich.

c: $M \otimes_R - \cong - \otimes_R M$, also folgt dies aus Satz 2. $\square$

4. Satz (Tor über HIR)

Über einem HIR R gilt:

(a) $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) = 0 \quad \forall i \geq 2.$

(b) $\mathrm{Tor}_1^R(R/d, N) = \underbrace{\ker(N \xrightarrow{d\cdot} N)}_{d\text{-Torsion von } N} \quad \forall d \in R \setminus \{0\}$

Beweis:

a: Jeder Modul M hat eine freie Auflösung der Form:

$$\dots \to 0 \to 0 \to R^{\oplus k} \to R^{\oplus n} \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M \to 0$$

Kern von ε ist frei, da R HIR.

b: Betrachte projektive Auflösung

$$\boxed{\dots \to 0 \to 0 \to R \xrightarrow{d} R} \to R/d \to 0$$

$$-\otimes_R N$$

$$\dots \to 0 \to 0 \to \underset{\text{Grad } 1}{N} \xrightarrow{d} \underset{\text{Grad } 0}{N} \to 0 \to 0$$

Homologie

$$\dots \quad 0 \quad 0 \quad \ker(d) \quad \left(\mathrm{coker}(d) = N/d\cdot N \cong R/d \otimes_R N \right) \quad 0 \quad 0$$

$\square$