D1: Linksderivierte Funktoren

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abelsche Kategorien

Ist $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ exakt, und

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz in $\mathcal{A}$, so reicht es oft, zwei der drei Objekte FX, FY, FZ in $\mathcal{B}$ zu kennen, um das dritte zu „berechnen".

Ist F nur rechtsexakt, reicht aber beispielsweise Kenntnis von FY und FZ i.A. nicht, um FX zu berechnen:

$$\ldots \to ? \to ? \to FX \to FY \to FZ \to 0$$

?

Idee: Setze Sequenz nach links durch weitere, leichter berechenbare Objekte fort (und berechne erst daraus FX).

Projektive Auflösungen

$\mathcal{A}$ abelsche Kategorie

1. Def.: Eine (Links-) Auflösung eines Objekts M aus $\mathcal{A}$ ist ein Komplex $P_\bullet$ aus $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ mit $P_i = 0 \ \forall i < 0$ zusammen mit einem Morphismus $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$

M aufgefasst als Komplex, der in Grad 0 konzentriert ist.

derart, dass

$$\cdots \longrightarrow P_3 \xrightarrow{d} P_2 \xrightarrow{d} P_1 \xrightarrow{d} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

exakt ist.

Sie heißt projektiv, falls jedes P_i projektiv ist.

2. Übung: $(P_\bullet, \varepsilon)$ Auflösung $\Longleftrightarrow$ $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ ist ein Quasiisomorphismus

3. Def. & Satz: $\mathcal{A}$ besitzt genügend projektive Objekte, falls für jedes Objekt M aus $\mathcal{A}$ ein projektives Objekt P_0 mit einem Epimorphismus $P_0 \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M$ existiert. In diesem Fall besitzt jedes Objekt aus $\mathcal{A}$ eine projektive Auflösung.

Beweis.

Wähle zu gegebenem M einen Epimorphismus $P_0 \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M$.
Schreibe M_0 für den Kern von ε:

$$0 \longrightarrow M_0 \overset{\kappa_0}{\rightarrowtail} P_0 \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow 0$$

Wähle $P_1 \overset{\varepsilon_1}{\twoheadrightarrow} M_0$ mit P_1 projektiv, und definiere $d_1 := \kappa_0 \circ \varepsilon_1$:

$$\begin{tikzcd}
 & M_0 \arrow[dr, tail, "\kappa_0"] & \\
P_1 \arrow[ur, two heads, "\varepsilon_1"] \arrow[rr, "d"] & & P_0
\end{tikzcd}$$

Setze dies induktiv fort. Dann ist

$$\begin{tikzcd}
 & & M_2 \arrow[dr, tail, "\kappa_2"] & & & & M_0 \arrow[dr, tail, "\kappa_0"] & & & \\
\cdots \arrow[r] & P_3 \arrow[ur, two heads, "\varepsilon_3"] \arrow[rr, "d"] & & P_2 \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, two heads, "\varepsilon_2"'] & & P_1 \arrow[ur, two heads, "\varepsilon_1"] \arrow[rr, "d"] & & P_0 \arrow[dr, two heads, "\varepsilon"] & & \\
 & & & & M_1 \arrow[ur, "\kappa_1"'] & & & & M \arrow[dr] & \\
 & & & & & & & & & 0
\end{tikzcd}$$

eine projektive Auflösung von M. $\square$

4. Beispiel: Jeder R-Modul besitzt eine projektive (sogar: eine freie) Auflösung.

5. Satz: Sei $M \xrightarrow{f} N$ in $\mathcal{A}$ beliebig,

$P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ in $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ mit P_i projektiv $\forall i \geq 0$, $P_i = 0$ $\forall i < 0$

$A_\bullet \xrightarrow{\varphi} N$ in $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ beliebige Auflösung

Dann existiert ein Morphismus $f_\bullet : P_\bullet \to A_\bullet$ derart, dass

$$\begin{tikzcd} P_\bullet \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_\bullet"'] & M \arrow[d, "f"] \\ A_\bullet \arrow[r, "\varphi"] & N \end{tikzcd}$$

kommutiert. Ferner ist $f_\bullet$ bis auf Homotopie eindeutig.

6. Korollar/Übung: Alle projektiven Auflösungen desselben Objekts sind homotopieäquivalent.

Beweis zu Satz 5:

Konstruiere $f_\bullet$ induktiv.

IA: „Übung"

IS: Angenommen, f_{i-1}, f_{i-2} bereits definiert.

$$\begin{tikzcd} P_i \arrow[rr, "d_i"] \arrow[dd, dashed] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddrr, bend left] & & P_{i-1} \arrow[rr, "d_{i-1}"] \arrow[dd, "f_{i-1}"] & & P_{i-2} \arrow[dd, "f_{i-2}"] \\ & \bullet \arrow[dr] & & & \\ A_i \arrow[rr, "d_i"'] \arrow[ur] & & A_{i-1} \arrow[rr, "d_{i-1}"'] & & A_{i-2} \end{tikzcd}$$

$A_\bullet$ exakt

$f_{i-1} \circ d_i$ faktorisiert durch $\searrow = \mathrm{im}(d_i) = \ker(d_{i-1})$, denn

$$d_{i-1} \circ f_{i-1} \circ d_i = f_{i-2} \circ \underbrace{d_{i-1} \circ d_i}_{0} = 0$$

Diese Faktorisierung faktorisiert durch A_i, da P_i projektiv.

Sei nun $\tilde{f}_\bullet$ weitere Wahl von $f_\bullet$. Definiere $h_\bullet := \tilde{f}_\bullet - f_\bullet$.
Wir zeigen $h \simeq 0$. Dazu konstruieren wir induktiv

$$\eta_i : P_i \longrightarrow A_{i+1}$$

mit $\eta d + d \eta = h$.

IA: $\eta_i = 0$ für $i < 0$.

IS: Seien η_{i-1}, η_{i-2} bereits konstruiert, also

$$d_i \eta_{i-1} + \eta_{i-2} d_{i-1} = h_{i-1}. \qquad (*)$$

$$\begin{tikzcd}
 & & P_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[dd, "h_i"] \arrow[ddll, dashed, bend right] \arrow[dl, dashed] & P_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] \arrow[dd, "h_{i-1}"] \arrow[ddl, "\eta_{i-1}"'] & P_{i-2} \arrow[dd, "h_{i-2}"] \arrow[ddl, "\eta_{i-2}"'] \\
 & \bullet \arrow[dr] & & & \\
A_{i+1} \arrow[rr, "d_{i+1}"'] \arrow[ur] & & A_i \arrow[r, "d_i"'] & A_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"'] & A_{i-2}
\end{tikzcd}$$

$h_i - \eta_{i-1} d_i$ faktorisiert durch $\searrow = \operatorname{im}(d_{i+1}) = \ker(d_i)$,
denn

$$\begin{aligned}
d_i \circ (h_i - \eta_{i-1} d_i) &= d_i h_i - d_i \eta_{i-1} d_i \\
&= h_{i-1} d_i - d_i \eta_{i-1} d_i \\
&= \underbrace{(h_{i-1} - d_i \eta_{i-1})}_{} \circ d_i \qquad \text{wegen } (*) \\
&= \eta_{i-2} \underbrace{d_{i-1} \circ d_i}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Diese Faktorisierung faktorisiert durch A_{i+1}, da P_i projektiv. Wähle diese Faktorisierung als η_i.
Dann gilt:

$$d_{i+1} \eta_i + \eta_{i-1} d_i = h_i - \eta_{i-1} d_i + \eta_{i-1} d_i = h_i \qquad \square$$

Linksderivierte Funktoren

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ abelsch, $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ additiver Funktor

7. Konstruktive Def.:

$\mathcal{A}$ mit genügend projektiven Objekten

F rechtsexakt

Die linksderivierten Funktoren $L_i F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ sind wie folgt def.:

Wähle zu jedem Objekt X aus $\mathcal{A}$ eine projektive Auflösung $(P_\bullet(X), \varepsilon_X)$; zu jedem Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{A}$ ein $f_\bullet: P_\bullet(X) \longrightarrow P_\bullet(Y)$ wie in Satz 5. Definiere

$$(L_i F)(X) := H_i(F P_\bullet(X))$$
$$(L_i F)(f) := H_i(F f_\bullet\ \ )$$

8. Satz:

(a) $L_i F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ist ein additiver Funktor

(b) $L_i F$ ist unabhängig von der Wahl der Auflösungen, bis auf (natürliche – siehe Def. 11? unten) Isomorphie.

(c) $L_0 F \cong F$ und $L_i F = 0 \quad \forall i < 0$.

(d) (Existenzberechtigung:)

Für jede k.e.S.

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0 \quad \text{in } \mathcal{A}$$

passen die derivierten Funktoren in eine lange exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & & \cdots \arrow[dlll, out=0, in=180, looseness=0.3] \\
L_2FX \arrow[r] & L_2FY \arrow[r] & L_2FZ \arrow[dll, out=0, in=180, looseness=0.3, "\delta_2"] & \\
L_1FX \arrow[r, "L_1Ff"] & L_1FY \arrow[r, "L_1Fg"] & L_1FZ \arrow[dll, out=0, in=180, looseness=0.3, "\delta_1"] & \\
FX \arrow[r, "Ff"] & FY \arrow[r, "Fg"] & FZ \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Beweisfragmente:

(a) Funktor [...] ✓

additiv: $f_\bullet + g_\bullet$ ist Auflösung von $f+g$ [...]

(b) Alle projektiven Auflösungen von X sind homotopieäquivalent (Korollar 6), haben also isomorphe Homologien (M4, Korollar 13).

Alle Auflösungen $f_\bullet$ von f sind homotop (Satz 5), induzieren also denselben Morphismus auf Homologie (M4, Satz 11).

(c) $P_i(X) = 0$ in Graden $i < 0$, also

$H_i(P_\bullet(X)) = 0$ für $i < 0$

Zu L_0F: Für $P_\bullet = P_\bullet(X) = \ldots \to P_1 \to P_0 \to 0 \to \ldots$

betrachte:

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 & \text{— exakt} \\
FP_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & FP_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & FX \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 & \text{— exakt, da } F \text{ rechtsexakt} \\
FP_1 \arrow[r] & FP_0 \arrow[r] & H_0(FP_\bullet) \arrow[r] & 0 & \text{— exakt}
\end{tikzcd}$$

$$H_0(FP_\bullet) = FP_0 / FP_1$$

Der induzierte Morphismus ↓ ist nach Fünfer-Lemma ein Iso.

(d) Beweis benutzt:

9. Hufeisenlemma:

Sei in abelscher Kategorie $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & & \vdots & \\
 & P_\bullet(X) \arrow[d] & & P_\bullet(Z) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

gegeben, wobei $P_\bullet(X)$ projektive Auflösung von X,
$P_\bullet(Z)$ projektive Auflösung von Z,
und horizontale Sequenz exakt ist.

Das Diagramm lässt sich um
$P_\bullet(Y)$, eine proj. Auflösung von Y,
und um Auflösungen $f_\bullet$ von f und $g_\bullet$ von g ergänzen derart, dass

$$0 \to P_i(X) \xrightarrow{f_i} P_i(Y) \xrightarrow{g_i} P_i(Z) \to 0$$

für jeden Grad i eine <u>spaltende</u> k.e.S. ist.

$$\left[\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_\bullet(X) \arrow[r, "f_\bullet"] \arrow[d] & P_\bullet(Y) \arrow[r, "g_\bullet"] \arrow[d] & P_\bullet(Z) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}\right]$$

$\square$

Beweis zu Satz 8 (d), fortgesetzt:

Wähle projektive Auflösungen $P_\bullet(X) \to X$
und $P_\bullet(Z) \to Z$
beliebig, und $P_\bullet(Y) \to Y$ wie im Hufeisenlemma.
Da

$$0 \to P_i(X) \xrightarrow{f_i} P_i(Y) \xrightarrow{g_i} P_i(Z) \to 0$$

spaltet, ist auch

$$0 \to FP_i(X) \xrightarrow{Ff_i} FP_i(Y) \xrightarrow{Fg_i} FP_i(Z) \to 0$$

exakt für jedes i. (Hier benutzen wir nur Additivität von F.)

(Übung: Additive Funktoren erhalten spaltende k.e.S.)

Wir erhalten also eine k.e.S. von Komplexen

$$0 \to FP_\bullet(X) \to FP_\bullet(Y) \to FP_\bullet(Z) \to 0,$$

und die gesuchte lange exakte Sequenz ist die assoziierte lange exakte Homologiesequenz.

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdots \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-1ex]\tikztostart.south) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] & & \cdots \\
L_2FX \arrow[r] & L_2FY \arrow[r] & L_2FZ \arrow[dll, rounded corners, "\delta_2", to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-1ex]\tikztostart.south) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] & & L_2F = H_2(P_\bullet(\ )) \\
L_1FX \arrow[r] & L_1FY \arrow[r] & L_1FZ \arrow[dll, rounded corners, "\delta_1", to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-1ex]\tikztostart.south) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] & & L_1F = H_1(P_\bullet(\ )) \\
FX \arrow[r] & FY \arrow[r] & FZ \arrow[r] & 0 & F = L_0F = H_0(P_\bullet(\ ))
\end{tikzcd}$$

$\square$

10. Def.: Ein *homologischer δ-Funktor* zwischen abelschen Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist eine Familie additiver Funktoren $T_i : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ $(i \geq 0)$ zusammen mit Morphismen

$$\delta_i : T_i Z \longrightarrow T_{i-1} X$$

für jede k.e.s. $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ in $\mathcal{A}$ derart, dass gilt:

- Für jede solche k.e.S. ist

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdots \arrow[dll, rounded corners] \\
T_2 X \arrow[r] & T_2 Y \arrow[r] & T_2 Z \arrow[dll, "\delta_2"] \\
T_1 X \arrow[r] & T_1 Y \arrow[r] & T_1 Z \arrow[dll, "\delta_1"] \\
T_0 X \arrow[r] & T_0 Y \arrow[r] & T_0 Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

exakt (insbesondere T_0 rechtsexakt).

- Die δ_i's sind natürlich: kommutiert

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "x"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "y"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "z"] & 0 & \text{(exakt)} \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & 0 & \text{(exakt)}
\end{tikzcd}$$

in $\mathcal{A}$, so kommutiert auch

$$\begin{tikzcd}
T_i Z \arrow[r, "\delta_i"] \arrow[d, "T_i z"'] & T_{i-1} X \arrow[d, "T_{i-1} x"] \\
T_i Z' \arrow[r, "\delta_i"'] & T_{i-1} X'
\end{tikzcd}$$

Er ist universell, falls für jeden weiteren δ-Funktor $(S_\bullet, \delta_\bullet^!)$ und jede natürliche Trafo

$$S_0 \rightsquigarrow T_0$$

eine eindeutige Familie natürlicher Trafos

$$S_i \rightsquigarrow T_i$$

existiert, die mit den Randmorphismen $\delta_\bullet$ und $\delta_\bullet^!$ kommutiert.

11. Satz (abstrakte Def. linksderivierter Funktoren)

$\mathcal{A}$ abelsch mit genügend proj. Objekten

Die linksderivierten Funktoren $L_i F$ eines rechtsexakten Funktors F bilden einen universellen δ-Funktor.

Beweis:

δ-Funktor: klar aus Satz 9, bis auf Natürlichkeit;

Natürlichkeit: Weibel, Theorem 2.4.6.

universell: Weibel $\square$

12. Übung: Ist F exakt, so ist

$$L_i F = 0 \quad \forall i > 0.$$