Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
22.04.2024

Homologische Algebra
Test 1

Es gibt insgesamt 5 Aufgaben, allesamt Ankreuzaufgaben. Pro Aufgabe sind genau 3 Antworten richtig, und es sind entsprechend maximal 3 Punkte zu erwerben. Sind Ihre Antworten bei einer Aufgabe nicht vollständig richtig, erhalten Sie als Punktzahl die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie mit genau drei Objekten X, Y und Z. Welche Möglichkeiten gibt es für die Kardinalitäten der Morphismenmengen?

■
$$\begin{array}{ccc}
|\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,X)| = 1 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)| = 0 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Z)| = 0 \\
|\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,X)| = 0 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Y)| = 2 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Z)| = 0 \\
|\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,X)| = 0 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,Y)| = 0 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,Z)| = 3
\end{array}$$

■
$$\begin{array}{ccc}
|\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,X)| = 1 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)| = 1 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Z)| = 1 \\
|\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,X)| = 1 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Y)| = 1 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Z)| = 1 \\
|\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,X)| = 1 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,Y)| = 1 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,Z)| = 1
\end{array}$$

□
$$\begin{array}{ccc}
|\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,X)| = 0 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)| = 1 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Z)| = 1 \\
|\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,X)| = 0 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Y)| = 0 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Z)| = 1 \\
|\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,X)| = 0 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,Y)| = 0 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,Z)| = 0
\end{array}$$

■
$$\begin{array}{ccc}
|\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,X)| = 1 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)| = 1 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Z)| = 1 \\
|\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,X)| = 0 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Y)| = 1 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Z)| = 1 \\
|\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,X)| = 0 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,Y)| = 0 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,Z)| = 1
\end{array}$$

□
$$\begin{array}{ccc}
|\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,X)| = 1 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)| = 1 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Z)| = 0 \\
|\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,X)| = 0 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Y)| = 1 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Z)| = 1 \\
|\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,X)| = 0 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,Y)| = 0 & |\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,Z)| = 1
\end{array}$$

Aufgabe 2

Zu welchen der folgenden Beschreibungen existieren Kategorien $\mathbf{C}$, auf die sie zutreffen?

☐ Objekte von $\mathbf{C}$ sind alle Teilmengen $U \subseteq \{0,1,2\}$, Morphismen sind alle strikten Inklusionen (also $|\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(U_1,U_2)| = 1$ falls $U_1 \subsetneq U_2$, andernfalls $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(U_1,U_2) = \emptyset$).

■ Objekte von $\mathbf{C}$ sind alle topologischen Räume, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$ sind alle Abbildungen von X nach Y (auch die unstetigen)

■ Objekte von $\mathbf{C}$ sind die natürlichen Zahlen, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(n,m) = \begin{cases} \{f_{n,m}\} & \text{falls } n \leqslant m \\ \emptyset & \text{falls } n > m \end{cases}$

(Hier ist $f_{n,m}$ einfach ein generischer Name für das einzige Element der genannten Morphismenmenge.)

☐ $\mathbf{C}$ besitzt genau ein Objekt $\star$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\star,\star)$ besteht aus denjenigen differenzierbaren Abbildungen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die an der Stelle Null Ableitung $f'(0) = 1$ haben.

■ Objekte von $\mathbf{C}$ sind alle Mengen, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$ sind alle Bijektionen.

☐ Objekte von $\mathbf{C}$ sind alle Mengen, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$ sind alle nicht-konstante Abbildungen.

Aufgabe 3

Betrachten Sie ein kommutatives Dreieck in einer Kategorie $\mathbf{C}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

■ Sind f und g Isomorphismen, so ist auch h ein Isomorphismus.
☐ Ist h ein Monomorphismus, so ist auch g ein Monomorphismus.
■ Ist h ein spaltender Monomorphismus, so ist auch f ein spaltender Monomorphismus.
☐ Ist h ein Monomorphismus und f ein spaltender Monomorphismus, so ist h ein spaltender Monomorphismus.
☐ Ist f ein Monomorphismus und g ein Epimorphismus, so ist h ein Isomorphismus.
■ Ist h ein Monomorphismus, so ist auch f ein Monomorphismus.

Aufgabe 4

Sei $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ein Funktor, $f\colon X \to Y$ ein Morphismus aus $\mathbf{C}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

■ Ist f ein Isomorphismus, so ist auch $F(f)$ ein Isomorphismus.
☐ Ist $F(f)$ ein Isomorphismus, so ist auch f ein Isomorphismus.
☐ Ist f ein Monomorphismus, so ist auch $F(f)$ ein Monomorphismus.
■ Ist f ein spaltender Epimorphismus, so ist auch $F(f)$ ein spaltender Epimorphismus.
☐ Ist X ein Anfangsobjekt von $\mathbf{C}$, so ist $F(X)$ ein Anfangsobjekt von $\mathbf{D}$.
☐ Ist X ein Anfangsobjekt von $\mathbf{C}$, so ist f ein Epimorphismus.
■ Ist Y ein Anfangsobjekt von $\mathbf{C}$, so ist f ein Epimorphismus.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ■ In der Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen ist die leere Menge ein Anfangsobjekt.
- □ In der Kategorie der abelschen Gruppen sind die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ein Anfangsobjekt.
- □ Fassen wir eine Menge mit einer Äquivalenzrelation als Kategorie auf, so gibt es darin stets ein Anfangsobjekt.
- ■ Fassen wir eine halbgeordnete Menge als Kategorie auf, so gibt es darin genau dann ein Anfangsobjekt, wenn es darin ein kleinstes Element gibt.
- ■ Ist X ein Anfangsobjekt einer Kategorie $\mathbf{C}$, so ist X ein Endobjekt in der dualen Kategorie $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$.
- □ Fassen wir eine Gruppe als Kategorie auf, so gibt es darin stets ein Endobjekt.

NAME IN DRUCKBUCHSTABEN:

Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
13.05.2024

Homologische Algebra
Test 2

Es gibt insgesamt 5 Aufgaben, allesamt Ankreuzaufgaben. Pro Aufgabe sind genau 3 Antworten richtig, und es sind entsprechend maximal 3 Punkte zu erwerben. Sind Ihre Antworten bei einer Aufgabe nicht vollständig richtig, erhalten Sie als Punktzahl die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

Aufgabe 1

Sei R ein beliebiger Ring (assoziativ, mit Eins). In den folgenden Aussagen ist mit „Modul“, „Untermodul“, „Quotientenmodul“ usw. stets ein Rechts-R-Modul, Rechts-R-Untermodul, Rechts-R-Quotientenmodul usw. gemeint. Welche dieser Aussagen sind im Allgemeinen richtig?

- ☐ Jeder Quotientenmodul eines endlich-erzeugten freien Moduls ist frei.
- ☐ Jeder Untermodul eines endlich-erzeugten freien Moduls ist frei.
- ■ Jeder endlich-erzeugte Modul lässt sich auffassen als ein Quotientenmodul eines endlich-erzeugten freien Moduls.
- ☐ Jeder endlich-erzeugte Modul lässt sich auffassen als ein Untermodul eines endlich-erzeugten freien Moduls.
- ■ Jeder Modul, der einen Quotientenmodul isomorph zu $R^{\oplus 2}$ besitzt, besitzt auch einen Untermodul isomorph zu $R^{\oplus 2}$.
- ■ Jede rechts-R-lineare Abbildung $R \to R$ ist durch Linksmultiplikation mit einem Element aus R gegeben.

Aufgabe 2

Welche der folgenden Aussagen über $\mathbb{Z}$-Moduln sind richtig?

- ■ Jede abelsche Gruppe ist auf kanonische Weise ein $\mathbb{Z}$-Modul.
- ■ Der Polynomring in zwei Unbestimmtem $\mathbb{Z}[x, y]$ ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul.
- ☐ Der Polynomring in zwei Unbestimmten $\mathbb{Z}[x, y]$ ist ein endlich-erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul.
- ■ Ein endlich-erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul ist genau dann frei, wenn er torsionsfrei ist.
- ☐ Ist U ein echter $\mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathbb{Z}^{\oplus 3}$ (also $U \subsetneq \mathbb{Z}^{\oplus 3}$), so hat U höchstens Rang 2.
- ☐ Es gibt einen Isomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Z}^{\oplus 2} \cong \mathbb{Z}^{\oplus 3}$.

Aufgabe 3

Welche der folgenden Existenzaussagen zu exakten Sequenzen in der Kategorie der abelschen Gruppen sind richtig?

- ☐ Es gibt eine exakte Sequenz der Form $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/25 \to 0$.
- ☐ Es gibt eine exakte Sequenz der Form $0 \to \mathbb{Z} \to 0$.
- ■ Es gibt eine exakte Sequenz der Form $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0$.
- ■ Es gibt eine spaltende kurze exakte Sequenz der Form $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^{\oplus 2} \to \mathbb{Z} \to 0$.
- ☐ Es gibt eine spaltende kurze exakte Sequenz der Form $0 \to \mathbb{Z}/5 \to \mathbb{Z}/25 \to \mathbb{Z}/5 \to 0$.
- ■ Es gibt eine spaltende kurze exakte Sequenz der Form $0 \to \mathbb{Z}/5 \to \mathbb{Z}/10 \to \mathbb{Z}/2 \to 0$.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Jede Kategorie, die äquivalent zum Fundamentalgruppoid des Kreises $\Pi(S^1)$ ist, hat unendlich viele Objekte.
- ■ Sind $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ und $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ Äquivalenzen von Kategorien, so ist auch $G \circ F$ eine Äquivalenz von Kategorien.
- ■ Zwei Mengen, aufgefasst als (diskrete) Kategorien, sind genau dann als Kategorien äquivalent, wenn es zwischen ihnen eine Bijektion gibt.
- ☐ Die Kategorie der endlich-dimensionalen reellen Vektorräume ist äquivalent zu der Kategorie, die wir erhalten, wenn wir die geordnete Menge $(\mathbb{N}, \leqslant)$ als Kategorie auffassen.
- ■ Ist X ein Anfangsobjekt einer Kategorie $\mathbf{C}$ und $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ eine Äquivalenz, so ist FX ein Anfangsobjekt von $\mathbf{D}$.
- ☐ Der vergessliche Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppen in die Kategorie aller Gruppen ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Für eine lokal kleine Kategorie $\mathbf{C}$ ist jeder Funktor $\mathbf{C} \to \mathbf{S}ets$ darstellbar.
- ☐ Der vergessliche Funktor $U\colon \mathbf{V}ec_{\mathbb{R}} \to \mathbf{S}ets$ wird dargestellt durch $(\mathbb{R}, 0)$, also durch den eindimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}$ zusammen mit der durch $0 \in U(\mathbb{R})$ definierten natürlichen Transformation $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, -) \rightsquigarrow U$.
- ■ Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge der Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$.
- ☐ Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge der Ringhomomorphismen $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ und $\mathbb{Z}$.
- ■ Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge der Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ und der Menge der natürlichen Transformationen $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}b}(\mathbb{R}, -) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}b}(\mathbb{Z}, -)$.
- ■ Sei $\mathcal{P}\colon \mathbf{S}ets \to \mathbf{S}ets$ der kovariante Potenzmengenfunktor. Es gibt genau zwei natürliche Transformation $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}ets}(\{1\}, -) \rightsquigarrow \mathcal{P}$.

Name in Druckbuchstaben:

Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
13.05.2024

Homologische Algebra
Test 3

Es gibt insgesamt 5 Aufgaben, allesamt Ankreuzaufgaben. Pro Aufgabe sind genau 3 Antworten richtig, und es sind entsprechend maximal 3 Punkte zu erwerben. Sind Ihre Antworten bei einer Aufgabe nicht vollständig richtig, erhalten Sie als Punktzahl die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

Wie immer ist $\mathbf{A}b$ die Kategorie der abelschen Gruppen, $\mathbf{V}ec_{\mathbb{R}}$ die Kategorie der $\mathbb{R}$-Vektorräume, $\mathbf{T}op$ die Kategorie der topologischen Räume, und $\mathbf{S}ets$ die Kategorie der Mengen.

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Das Produkt von $\{0,1,2\}$ und $\{1,2,3\}$ in $\mathbf{S}ets$ ist eine Menge mit 6 Elementen.
- ■ Das Produkt von $\{0,1,2\}$ und $\{1,2,3\}$ in $\mathbf{S}ets$ ist eine Menge mit 9 Elementen.
- ☐ Das Koprodukt von $\{0,1,2\}$ und $\{1,2,3\}$ in $\mathbf{S}ets$ ist eine Menge mit 4 Elementen.
- ■ Das Koprodukt von $\{0,1,2\}$ und $\{1,2,3\}$ in $\mathbf{S}ets$ ist eine Menge mit 6 Elementen.
- ☐ Sei C_3 die zyklische Gruppe mit 3 Elementen. Das Koprodukt von C_3 mit C_3 in $\mathbf{A}b$ ist eine abelsche Gruppe mit 6 Elementen.
- ■ Sei C_3 die zyklische Gruppe mit 3 Elementen. Das Koprodukt von C_3 mit C_3 in $\mathbf{A}b$ ist eine abelsche Gruppe mit 9 Elementen.

Aufgabe 2

Wir betrachten die folgenden beiden vergesslichen Funktoren U und $U_{\mathbb{R}}$ sowie den kovarianten Potenzmengenfunktor $\mathcal{P}$:

$$U\colon \mathbf{T}op \to \mathbf{S}ets \qquad U_{\mathbb{R}}\colon \mathbf{V}ec_{\mathbb{R}} \to \mathbf{S}ets \qquad \mathcal{P}\colon \mathbf{S}ets \to \mathbf{S}ets$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ■ Ist $\boxed{X\times Y}$ ein Produkt zweier topologischer Räume X und Y,
  so ist $U(\boxed{X\times Y})$ ein Produkt von $U(X)$ und $U(Y)$ in $\mathbf{S}ets$.
- ■ Ist $\boxed{X\sqcup Y}$ ein Koprodukt zweier topologischer Räume X und Y,
  so ist $U(\boxed{X\sqcup Y})$ ein Koprodukt von $U(X)$ und $U(Y)$ in $\mathbf{S}ets$.
- ■ Ist $\boxed{V\times W}$ ein Produkt zweier $\mathbb{R}$-Vektorräume V und W,
  so ist $U_{\mathbb{R}}(\boxed{V\times W})$ ein Produkt von $U_{\mathbb{R}}(V)$ und $U_{\mathbb{R}}(W)$ in $\mathbf{S}ets$.
- ☐ Ist $\boxed{V\sqcup W}$ ein Koprodukt zweier $\mathbb{R}$-Vektorräume V und W,
  so ist $U_{\mathbb{R}}(\boxed{V\sqcup W})$ ein Koprodukt von $U_{\mathbb{R}}(V)$ und $U_{\mathbb{R}}(W)$ in $\mathbf{S}ets$.
- ☐ Ist $\boxed{S\times T}$ ein Produkt zweier Mengen S und T,
  so ist $\mathcal{P}(\boxed{S\times T})$ ein Produkt von $\mathcal{P}(S)$ und $\mathcal{P}(T)$ in $\mathbf{S}ets$.
- ☐ Ist $\boxed{S\sqcup T}$ ein Koprodukt zweier Mengen S und T,
  so ist $\mathcal{P}(\boxed{S\sqcup T})$ ein Koprodukt von $\mathcal{P}(S)$ und $\mathcal{P}(T)$ in $\mathbf{S}ets$.

Aufgabe 3

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Sei $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \ldots$ eine Folge von Mengen und Inklusionen. Die Vereinigung $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ (zusammen mit geeineten Strukturabbildungen) ist ein in sequentieller *Limes* dieser Folge in $\mathbf{S}ets$.
- ■ Sei $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \ldots$ wie oben. Die Vereinigung $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ ist ein sequentieller *Kolimes* dieser Folge in $\mathbf{S}ets$.
- ■ Sei $(S, \leqslant)$ eine Menge mit einer Halbordnung, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \ldots$ eine aufsteigende Folge in S. Ein Infimum der Teilmenge $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist ein sequentieller *Limes* der Folge in S.
- ☐ Seien $(S, \leqslant)$ und $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \ldots$ wie oben. Ein Infimum der Teilmenge $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist ein sequentieller *Kolimes* der Folge in S.
- ■ Sei $\emptyset$ die Kategorie ohne Objekte, $D \colon \emptyset \to \mathbf{C}$ entsprechend ein „leeres Diagramm“ in einer Kategorie $\mathbf{C}$. Ein terminales Objekt von $\mathbf{C}$ ist ein *Limes* von D.
- ☐ Sei $D \colon \emptyset \to \mathbf{C}$ wie oben. Ein terminales Objekt von $\mathbf{C}$ ist ein *Kolimes* von D.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Existenzaussagen zu exakten Sequenzen in der Kategorie der abelschen Gruppen sind richtig?

- ■ Es gibt eine exakte Sequenz der Form $0 \to \mathbb{Z}/5 \to \mathbb{Z}/5 \to 0$.
- ☐ Es gibt eine exakte Sequenz der Form $0 \to \mathbb{Z}/3 \to \mathbb{Z} \to 0$.
- ☐ Es gibt eine exakte Sequenz der Form $0 \to \mathbb{Z}/5 \to 0$.
- ■ Es gibt eine spaltende kurze exakte Sequenz der Form $0 \to \mathbb{Z}^{\oplus 2} \to \mathbb{Z}^{\oplus 3} \to \mathbb{Z} \to 0$.
- ☐ Es gibt eine spaltende kurze exakte Sequenz der Form $0 \to \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2 \to 0$.
- ■ Es gibt eine spaltende kurze exakte Sequenz der Form $0 \to \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/6 \to \mathbb{Z}/3 \to 0$.

Aufgabe 5

In den folgenden Aussagen ist mit „Modul“, „Untermodul“, „Quotientenmodul“ usw. stets ein $\mathbb{Z}$-Modul, $\mathbb{Z}$-Untermodul, $\mathbb{Z}$-Quotientenmodul usw. gemeint, auch in den Fällen, in denen es nicht explizit angegeben ist. Welche dieser Aussagen sind richtig?

- ☐ Jeder Quotientenmodul eines endlich-erzeugten freien $\mathbb{Z}$-Moduls ist frei.
- ■ Jeder Untermodul eines endlich-erzeugten freien $\mathbb{Z}$-Moduls ist frei.
- ■ Jeder endlich-erzeugte $\mathbb{Z}$-Modul lässt sich auffassen als ein Quotientenmodul eines endlich-erzeugten *freien* $\mathbb{Z}$-Moduls.
- ☐ Jeder endlich-erzeugte $\mathbb{Z}$-Modul lässt sich auffassen als ein Untermodul eines endlich-erzeugten *freien* $\mathbb{Z}$-Moduls.
- ☐ Jeder $\mathbb{Z}$-Modul, der einen Quotientenmodul isomorph zu $\mathbb{Z}/2$ besitzt, besitzt auch einen Untermodul isomorph zu $\mathbb{Z}/2$.
- ■ Jeder $\mathbb{Z}$-Modul, der einen Quotientenmodul isomorph zu $\mathbb{Z}$ besitzt, besitzt auch einen Untermodul isomorph zu $\mathbb{Z}$.

NAME IN DRUCKBUCHSTABEN:

Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
24.06.2024

Homologische Algebra
Test 4

Es gibt insgesamt 5 Aufgaben, allesamt Ankreuzaufgaben. Pro Aufgabe sind genau 3 Antworten richtig, und es sind entsprechend maximal 3 Punkte zu erwerben. Sind Ihre Antworten bei einer Aufgabe nicht vollständig richtig, erhalten Sie als Punktzahl die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

Aufgabe 1

Sei R ein kommutativer Ring, M und N zwei R-Moduln. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Die kanonische Abbildung $M \oplus N \to M \otimes_R N$ ist surjektiv.
- ■ In der üblichen Konstruktion von $M \otimes_R N$ ist jedes Element eine Linearkombination der Form $\sum_i a_i(m_i \otimes n_i)$ für gewisse Elemente $a_i \in R$, $m_i \in M$ und $n_i \in N$.
- ■ Sind M und N endlich-erzeugt und frei, so ist auch $M \otimes_R N$ endlich-erzeugt und frei.
- ■ Es gibt einen Isomorphismus $R \otimes_R R \to R$, der $a \otimes b$ auf $a \cdot b$ wirft.
- ☐ Es gibt einen Isomorphismus $R \otimes_R R \to R$, der $a \otimes b$ auf $a + b$ wirft.
- ☐ Es gibt einen Isomorphismus $R \otimes_R R \to R$, der $a \otimes b$ auf a wirft.

Aufgabe 2

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Alle Tensorprodukte $\otimes$ sind zu verstehen als Tensorprodukte $\otimes_{\mathbb{Z}}$, also als Tensorprodukte von abelschen Gruppen/$\mathbb{Z}$-Moduln.

- ☐ $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{\oplus 2}$
- ■ $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$
- ■ $\mathbb{Z}/5 \otimes \mathbb{Z}/5 \cong \mathbb{Z}/5$
- ☐ $\mathbb{Z}/3 \otimes \mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{Z}/6$
- ■ $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/5 \cong \mathbb{Z}/5$
- ☐ $S^1 \otimes \mathbb{Z}/2 \cong S^1 \times S^1$

Aufgabe 3

Sei $\mathbf{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ ein Paar von Funktoren in entgegengesetzte Richtungen. Was ist richtig?

- ☐ Ist G rechtsadjunktiert zu F, so schickt die zugehörige Bijektion $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, GY) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(FX, Y)$ Isomorphismen auf Isomorphismen.
- ■ Ist G rechtsadjungiert zu F, so erhält G Monomorphismen.
- ■ Ist G rechtsadjungiert zu F, und ist Y ein Endobjekt in $\mathbf{D}$, so ist GY ein Endobjekt in $\mathbf{C}$.
- ■ Definieren F und G eine Äquivalenz von Kategorien, so ist F rechts- *und* linksadjungiert zu G.
- ☐ Jeder volltreue Funktor ist ein linksadjungierter Funktor (besitzt also einen rechtsadjunktierten).
- ☐ Ist F linksadjungiert zu G, und G linksadjungiert zu einem weiteren Funktor $H\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, so ist auch F linksadjungiert zu H.

Aufgabe 4

Im Folgenden sei wie üblich ...

... $\mathbf{S}ets$ die Kategorie der Mengen und Abbildungen,
... $\mathbf{T}op$ die Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen,
... $\mathbf{A}b$ die Kategorie der abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen,
... $\mathbf{M}od_R$ die Kategorie der (Rechts-)R-Moduln und (rechts-)R-linearen Abbildungen,
... $\mathbf{C}at$ die Kategorie der kleinen Kategorien und Funktoren.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ■ Der vergessliche Funktor $\mathbf{T}op \to \mathbf{S}ets$ besitzt sowohl einen links- als auch einen rechts-adjungierten Funktor.
- ☐ Der vergessliche Funktor $\mathbf{A}b \to \mathbf{S}ets$ besitzt sowohl einen links- als auch einen rechts-adjungierten Funktor.
- ■ Für jeden kommutativen Ring R ist $\operatorname{Hom}_R(B, -)\colon \mathbf{M}od_R \to \mathbf{M}od_R$ *rechts*adjungiert zu $- \otimes_R B\colon \mathbf{M}od_R \to \mathbf{M}od_R$.
- ☐ Für jeden kommutativen Ring R ist $\operatorname{Hom}_R(B, -)\colon \mathbf{M}od_R \to \mathbf{M}od_R$ *links*adjungiert zu $- \otimes_R B\colon \mathbf{M}od_R \to \mathbf{M}od_R$.
- ■ Der Funktor $\operatorname{ob}\colon \mathbf{C}at \to \mathbf{S}ets$, der eine Kategorie auf die Menge ihrer Objekte wirft, ist *rechts*adjungiert zum diskreten Funktor, der eine Menge auffasst als diskrete Kategorie.
- ☐ Der Funktor $\operatorname{ob}\colon \mathbf{C}at \to \mathbf{S}ets$ ist *links*adjungiert zum diskreten Funktor.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Aussagen über Komplexe abelscher Gruppen sind richtig?

- ■ Ein Komplex ist genau dann exakt, wenn alle seine Homologiegruppen trivial sind.
- ■ Die Sequenz
$$\cdots \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4 \to 0 \to 0 \to \cdots$$
ist ein Komplex.
- ☐ Die Sequenz
$$\cdots \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \to 0 \to 0 \to \cdots$$
ist ein Komplex.
- ☐ Es gibt einen exakten Komplex der Form
$$\cdots \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2 \to 0 \to 0 \to \cdots$$
- ■ Es gibt einen exakten Komplex der Form
$$\cdots \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2 \to 0 \to 0 \to \cdots$$
- ☐ Jeder Quasi-Isomorphismus von Komplexen ist eine Homotopieäquivalenz.
- ☐ Es gibt neben dem Nullkomplex weitere Komplexe, in denen alle Differentiale injektiv sind.

Name in Druckbuchstaben: