Aufgabe 4

Diese Aufgaben hat vier Teilaufgaben, (a) bis (d). Pro Teilaufgabe sind genau 3 Antworten richtig, und es sind entsprechend maximal 3 Punkte zu erwerben. Sind Ihre Antworten bei einer Teilaufgabe nicht vollständig richtig, erhalten Sie als Punktzahl für diese Teilaufgabe die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

(a) Sei $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ein Funktor, $f\colon X \to Y$ ein Morphismus aus $\mathbf{C}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Ist f ein Monomorphismus und ein Epimorphismus, so ist f ein Isomorphismus.
- ☐ Ist f ein Monomorphismus, so ist auch $F(f)$ ein Monomorphismus.
- ■ Ist f ein Isomorphismus, so ist auch $F(f)$ ein Isomorphismus.
- ☐ Ist X ein Anfangsobjekt von $\mathbf{C}$, so ist f ein Epimorphismus.
- ■ Ist Y ein Anfangsobjekt von $\mathbf{C}$, so ist f ein Epimorphismus.
- ■ Ist f ein Isomorphismus, so ist f insbesondere ein Epimorphismus.

(b) Sei R ein Ring. Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

- ☐ Jeder endlich-erzeugte R-Modul ist frei.
- ■ Jeder freie R-Modul ist projektiv.
- ☐ Jeder projektive R-Modul ist frei.
- ■ Jeder projektive R-Modul ist flach.
- ☐ Jeder flache R-Modul ist frei.
- ☐ Jeder Quotientenmodul eines projektiven R-Moduls ist projektiv.
- ■ Ist $0 \to P_1 \to M \to P_2 \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln, in der P_1 und P_2 projektiv sind, so ist auch M projektiv.

(c) Im Folgenden sei wie üblich ...

... **Sets** die Kategorie der Mengen und Abbildungen,

... **Top** die Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen,

... **Ab** die Kategorie der abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen,

... $\mathbf{Mod}_R$ die Kategorie der (Rechts-)R-Moduln und (rechts-)R-linearen Abbildungen,

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ■ Der vergessliche Funktor $\mathbf{Top} \to \mathbf{Sets}$ besitzt sowohl einen links- als auch einen rechts-adjungierten Funktor.
- ■ Der vergessliche Funktor $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Sets}$ besitzt einen links-adjungierten Funktor.
- ☐ Der vergessliche Funktor $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Sets}$ besitzt einen rechts-adjungierten Funktor.
- ■ Für jeden kommutativen Ring R besitzt $\mathrm{Hom}_R(B, -)\colon \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_R$ einen links-adjungierten Funktor.
- ☐ Ist allgemein $\mathbf{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ eine Adjunktion, mit F linksadjungiert zu G, so schickt die zugehörige Bijektion $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, GY) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(FX, Y)$ Isomorphismen auf Isomorphismen.
- ☐ Jeder rechtsadjungierte Funktor erhält Kolimiten.

(d) Sei R ein Hauptidealring, seien M und N zwei R-Moduln, $d \in R$ ein Element ungleich 0. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ■ $\mathrm{Tor}_0^R(N, R/d)$ ist isomorph zum Kokern von $N \xrightarrow{d} N$.
- ■ $\mathrm{Tor}_1^R(N, R/d)$ ist isomorph zum Kern von $N \xrightarrow{d} N$.
- ☐ $\mathrm{Ext}_R^0(N, R/d)$ ist isomorph zu $\mathrm{Hom}_R(R/d, N)$.
- ☐ $\mathrm{Ext}_R^1(R/d, N)$ ist isomorph zum Kern von $N \xrightarrow{d} N$.
- ■ Es gibt eine Bijektion zwischen den Elementen von $\mathrm{Ext}_R^1(N, R/d)$ und der Menge der Äquivalenzklassen von Erweiterungen $0 \to R/d \to ? \to N \to 0$.
- ☐ Es gibt eine Bijektion zwischen den Elementen von $\mathrm{Ext}_R^1(N, R/d)$ und der Menge der Äquivalenzklassen von Erweiterungen $0 \to N \to ? \to R/d \to 0$.