JH

Homologische Algebra: Klausur 2

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2024

- **Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 4 Aufgaben. Pro Aufgabe sind 12 Punkte zu erwerben.**
- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telefonjoker etc.) außer mechanischen Armbanduhren und Weckern zugelassen.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					/48

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe geht es um das Yoneda-Lemma.

(a) Geben Sie eine detaillierte Definition einer natürlichen Transformation zwischen zwei Funktoren an.

(b) Sei nun $\mathbf{C}$ eine lokal kleine Kategorie, $\mathbf{Sets}$ die Kategorie der Mengen, und $F\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sets}$ ein Funktor. Sei ferner X ein Objekt von $\mathbf{C}$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X)\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sets}$ der assoziierte Hom-Funktor. Geben Sie explizit eine Bijektion α zwischen der Menge $F(X)$ einerseits und der Menge der natürlichen Transformationen von $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X)$ zu F andererseits an. Beweisen Sie, dass es sich tatsächlich um eine Bijektion handelt.

(c) Geben Sie ein konkretes Beispiel an für eine Kategorie $\mathbf{C}$, einen Funktor $F\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sets}$, ein Objekt X aus $\mathbf{C}$ und ein Element $x \in F(X)$ derart, dass die Transformation $\alpha(x)$ ein natürlicher Isomorphismus ist. Beweisen Sie, dass es sich tatsächlich um ein Beispiel mit der geforderten Eigenschaft handelt.

(d) Geben Sie ein konkretes Beispiel an für eine Kategorie $\mathbf{C}$, einen Funktor $F\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sets}$, ein Objekt X aus $\mathbf{C}$ und ein Element $x \in F(X)$ derart, dass die Transformation $\alpha(x)$ *kein* natürlicher Isomorphismus ist. Beweisen Sie, dass es sich tatsächlich um ein Beispiel mit der geforderten Eigenschaft handelt.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 1
(Seite 3)

Aufgabe 2
In dieser Aufgabe berechnen Sie $S^1 \otimes \mathbb{Q}$. Alle Tensorprodukte sind gemeint als Tensorprodukte abelscher Gruppen (also $\otimes = \otimes_{\mathbb{Z}}$).

(a) Geben Sie die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts zweier abelscher Gruppen an.

(b) Sei $\exp\colon \mathbb{R} \to S^1$ die übliche Exponentialabbildung $x \mapsto e^{2\pi i x}$. Ergänzen Sie das folgende Diagramm zu einer kurzen exakten Sequenz:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} S^1 \to \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Begründen Sie kurz Ihre Wahl.

(c) Berechnen Sie Kern und Kokern der Abbildung $\exp \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}\colon \mathbb{R} \otimes \mathbb{Q} \to S^1 \otimes \mathbb{Q}$. Fassen Sie Ihr Ergebnis wieder zu einer exakten Sequenz zusammen.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R} \otimes \mathbb{Q}$ isomorph ist zu $\mathbb{R}$. Geben Sie einen konkreten Isomorphismus an.

(e) Benutzen Sie Ihre bisherigen Resultate, um $S^1 \otimes \mathbb{Q}$ mit einem Quotienten von $\mathbb{R}$ zu identifizieren. Begründen Sie kurz, ob $S^1 \otimes \mathbb{Q}$ isomorph ist zur trivialen Gruppe oder nicht.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 3
Sei $\mathbf{A}$ eine abelsche Kategorie.

(a) Geben Sie die Definition eines injektiven Objekts in $\mathbf{A}$ an.

(b) Geben Sie ein Beispiel an für eine abelsche Kategorie $\mathbf{A}$ und ein nicht-triviales Objekt X aus $\mathbf{A}$, das injektiv ist. Weisen Sie anhand der Definition oder anhand eines Satzes aus der Vorlesung nach, dass das Objekt tatsächlich injektiv ist.

(c) Geben Sie ein Beispiel an für ein abelsche Kategorie $\mathbf{A}$ und ein nicht-triviales Objekt X aus $\mathbf{A}$, das *nicht* injektiv ist. Weisen Sie anhand der Definition oder anhand eines Satzes aus der Vorlesung nach, dass das Objekt tatsächlich nicht injektiv ist.

(d) Sei I eine beliebige kleine Kategorie, X_i für jedes Objekt von i ein Objekt aus $\mathbf{A}$. Geben Sie die allgemeine Definition eines Produkts $\prod_{i \in I} X_i$ in $\mathbf{A}$ an.

(e) Zeigen Sie, dass ein Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ (sofern es existiert) genau dann injektiv ist, wenn jeder Faktor X_i injektiv ist.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 4
Diese Aufgaben hat vier Teilaufgaben, (a) bis (d). Pro Teilaufgabe sind genau 3 Antworten richtig, und es sind entsprechend maximal 3 Punkte zu erwerben. Sind Ihre Antworten bei einer Teilaufgabe nicht vollständig richtig, erhalten Sie als Punktzahl für diese Teilaufgabe die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

(a) Sei $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ein Funktor, $f\colon X \to Y$ ein Morphismus aus $\mathbf{C}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Ist f ein Monomorphismus und ein Epimorphismus, so ist f ein Isomorphismus.
- ☐ Ist f ein Monomorphismus, so ist auch $F(f)$ ein Monomorphismus.
- ☐ Ist f ein Isomorphismus, so ist auch $F(f)$ ein Isomorphismus.
- ☐ Ist X ein Anfangsobjekt von $\mathbf{C}$, so ist f ein Epimorphismus.
- ☐ Ist Y ein Anfangsobjekt von $\mathbf{C}$, so ist f ein Epimorphismus.
- ☐ Ist f ein Isomorphismus, so ist f insbesondere ein Epimorphismus.

(b) Sei R ein Ring. Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

- ☐ Jeder endlich-erzeugte R-Modul ist frei.
- ☐ Jeder freie R-Modul ist projektiv.
- ☐ Jeder projektive R-Modul ist frei.
- ☐ Jeder projektive R-Modul ist flach.
- ☐ Jeder flache R-Modul ist frei.
- ☐ Jeder Quotientenmodul eines projektiven R-Moduls ist projektiv.
- ☐ Ist $0 \to P_1 \to M \to P_2 \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln, in der P_1 und P_2 projektiv sind, so ist auch M projektiv.

(c) Im Folgenden sei wie üblich …

… **Sets** die Kategorie der Mengen und Abbildungen,

… **Top** die Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen,

… **Ab** die Kategorie der abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen,

… $\mathbf{Mod}_R$ die Kategorie der (Rechts-)R-Moduln und (rechts-)R-linearen Abbildungen,

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Der vergessliche Funktor $\mathbf{Top} \to \mathbf{Sets}$ besitzt sowohl einen links- als auch einen rechts-adjungierten Funktor.
- ☐ Der vergessliche Funktor $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Sets}$ besitzt einen links-adjungierten Funktor.
- ☐ Der vergessliche Funktor $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Sets}$ besitzt einen rechts-adjungierten Funktor.
- ☐ Für jeden kommutativen Ring R besitzt $\mathrm{Hom}_R(B, -)\colon \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_R$ einen links-adjungierten Funktor.
- ☐ Ist allgemein $\mathbf{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ eine Adjunktion, mit F linksadjungiert zu G, so schickt die zugehörige Bijektion $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, GY) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(FX, Y)$ Isomorphismen auf Isomorphismen.
- ☐ Jeder rechtsadjungierte Funktor erhält Kolimiten.

(d) Sei R ein Hauptidealring, seien M und N zwei R-Moduln, $d \in R$ ein Element ungleich 0. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ $\mathrm{Tor}_0^R(N, R/d)$ ist isomorph zum Kokern von $N \xrightarrow{d} N$.
- ☐ $\mathrm{Tor}_1^R(N, R/d)$ ist isomorph zum Kern von $N \xrightarrow{d} N$.
- ☐ $\mathrm{Ext}_R^0(N, R/d)$ ist isomorph zu $\mathrm{Hom}_R(R/d, N)$.
- ☐ $\mathrm{Ext}_R^1(R/d, N)$ ist isomorph zum Kern von $N \xrightarrow{d} N$.
- ☐ Es gibt eine Bijektion zwischen den Elementen von $\mathrm{Ext}_R^1(N, R/d)$ und der Menge der Äquivalenzklassen von Erweiterungen $0 \to R/d \to ? \to N \to 0$.
- ☐ Es gibt eine Bijektion zwischen den Elementen von $\mathrm{Ext}_R^1(N, R/d)$ und der Menge der Äquivalenzklassen von Erweiterungen $0 \to N \to ? \to R/d \to 0$.

Bitte prüfen Sie abschließend die folgenden Angaben und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:

Name:	Jan Hennig
Matrikelnr.:	0123459789