Aufgabe 4

Diese Aufgaben hat vier Teilaufgaben, (a) bis (d). Pro Teilaufgabe sind genau 3 Antworten richtig, und es sind entsprechend maximal 3 Punkte zu erwerben. Sind Ihre Antworten bei einer Teilaufgabe nicht vollständig richtig, erhalten Sie als Punktzahl für diese Teilaufgabe die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

(a) Betrachten Sie ein kommutatives Dreieck in einer Kategorie $\mathbf{C}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ■ Sind f und g Isomorphismen, so ist auch h ein Isomorphismus.
- ☐ Ist h ein Monomorphismus und f ein spaltender Monomorphismus, so ist h ein spaltender Monomorphismus.
- ☐ Ist f ein Monomorphismus und g ein Epimorphismus, so ist h ein Isomorphismus.
- ■ Ist h ein Monomorphismus, so ist auch f ein Monomorphismus.
- ☐ Ist h ein Monomorphismus, so ist auch g ein Monomorphismus.
- ■ Ist h ein spaltender Monomorphismus, so ist auch f ein spaltender Monomorphismus.

(b) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ In der Kategorie der abelschen Gruppen sind die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ein Anfangsobjekt.
- ☐ Fassen wir eine Menge mit einer Äquivalenzrelation als Kategorie auf, so gibt es darin stets ein Anfangsobjekt.
- ■ Fassen wir eine halbgeordnete Menge als Kategorie auf, so gibt es darin genau dann ein Anfangsobjekt, wenn es darin ein kleinstes Element gibt.
- ☐ Fassen wir eine Gruppe als Kategorie auf, so gibt es darin stets ein Endobjekt.
- ■ Ist X ein Anfangsobjekt einer Kategorie $\mathbf{C}$, so ist X ein Endobjekt in der dualen Kategorie $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$.
- ■ In der Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen ist die leere Menge ein Anfangsobjekt.

(c) Sei R ein kommutativer Ring (assoziativ, mit Eins). In den folgenden Aussagen ist mit „Modul“, „Untermodul“, „Quotientenmodul“ usw. stets ein R-Modul, R-Untermodul, R-Quotientenmodul usw. gemeint. Welche dieser Aussagen sind im Allgemeinen richtig?

- ■ Jeder freie Modul ist flach.
- ☐ Jeder Quotientenmodul eines freien Moduls ist frei.
- ☐ Jeder Untermodul eines freien Moduls ist frei.
- ■ Jeder projektive Modul ist Untermodul eines freien Moduls.
- ☐ Jeder Untermodul eines freien Moduls ist projektiv.
- ■ Jeder endlich-erzeugte Modul lässt sich auffassen als ein Quotientenmodul eines endlich-erzeugten freien Moduls.

(d) Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Alle Tensorprodukte $\otimes$ sind zu verstehen als Tensorprodukte $\otimes_{\mathbb{Z}}$, also als Tensorprodukte von abelschen Gruppen/$\mathbb{Z}$-Moduln.

- ☐ $\mathbb{Z}^{\oplus 3} \otimes \mathbb{Z}^{\oplus 3} \cong \mathbb{Z}^{\oplus 6}$
- ■ $\mathbb{Z}/12 \otimes \mathbb{Z}/8 \cong \mathbb{Z}/4$
- ☐ $\mathbb{Z}/12 \otimes \mathbb{Z}/8 \cong \mathbb{Z}/24$
- ■ $\mathbb{R} \otimes \mathbb{Z}/2 \cong 0$
- ■ $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} \cong 0$
- ☐ $S^1 \otimes \mathbb{Q} \cong 0$