JH

Homologische Algebra: Klausur 1

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2024

- **Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 4 Aufgaben. Pro Aufgabe sind 12 Punkte zu erwerben.**
- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telefonjoker etc.) außer mechanischen Armbanduhren und Weckern zugelassen.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					/48

Aufgabe 1

Wir betrachten die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als abelsche Gruppe, und eine Untergruppe $A \subseteq \mathbb{R}$. Ferner fixieren wir eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$.

(a) Zu welchen der folgenden abelschen Gruppen kann A (unter anderem) isomorph sein?

$$\mathbb{Z} \qquad\qquad \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \qquad\qquad \mathbb{Z}/m \text{ (für } m > 1) \qquad\qquad \mathbb{Q}$$

Geben Sie zur Antwort jeweils eine mögliche Einbettung der genannten Gruppen als Untergruppe in $\mathbb{R}$ an, oder begründen Sie kurz, warum keine solche Einbettung existiert.

(b) Offenbar definiert Multiplikation mit n einen Gruppenhomomorphismus $n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass ein Gruppenhomomorphisums $\bar{n}\colon \mathbb{R}/A \to \mathbb{R}/A$ existiert, für den das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "n"'] & \mathbb{R}/A \arrow[d, "\bar{n}"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, two heads] & \mathbb{R}/A
\end{tikzcd}$$

(c) Berechnen Sie in Abhängigkeit von A und n den Kern und den Kokern von $\bar{n}$.

Tipp: Falls Sie nicht weiterkommen, denken Sie zuerst über eine konkrete Untergruppe aus Teil (a) nach. Das Ergebnis brauchen Sie ohnehin für Teil (d).

(d) Konkretisieren Sie Ihre Berechnung aus dem vorherigen Aufgabenteil für die Untergruppen, die Sie in (a) genannt haben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 1
(Seite 4)

Aufgabe 2
Wir betrachten eine Adjunktion

$$F\colon \mathbf{A} \rightleftarrows \mathbf{B} :G$$

zwischen zwei lokal kleinen Kategorien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$. Gegeben sind also ein Funktor $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ und ein Funktor $G\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$, und F ist linksadjungiert zu G.

(a) Geben Sie eine detaillierte Definition von „F ist linksadjungiert zu G“ an.

(b) Welche der beiden folgenden Aussagen sind richtig?

F erhält beliebige Kolimiten.
F erhält beliebige Limiten.

Geben Sie für die richtige(n) Aussage(n) einen Beweis und für die falsche(n) Aussagen(n) jeweils ein konkretes Gegenbeispiel an, also einen konkreten Funktor und einen konkreten Limes oder Kolimes, der von diesem Funktor nicht erhalten wird.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 2

Aufgabe 2
(Seite 8)

Aufgabe 3

Wir betrachten den Polynomring in einer Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten, also $\mathbb{Z}[x]$. Der eindeutige Ringhomomorphismus $\varepsilon\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}/2$, der x auf 0 abbildet, induziert auf $\mathbb{Z}/2$ eine $\mathbb{Z}[x]$-Modul-Struktur. Im Folgenden sei $\mathbb{Z}/2$ stets mit dieser $\mathbb{Z}[x]$-Modul-Struktur versehen.

(a) Berechnen Sie den Kern von ε.

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Sequenz ein Komplex ist:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}[x] \arrow[r, "\begin{pmatrix} 2 \\ -x \end{pmatrix}"] & \mathbb{Z}[x] \oplus \mathbb{Z}[x] \arrow[r, "(x\ 2)"] & \mathbb{Z}[x] \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
 & & & & & (-1) & (-2) & & &
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie ferner, dass sie in den markierten Graden (-1) und (-2) exakt ist.

Tatsächlich ist die Sequenz in an jeder Stelle exakt. Das dürfen Sie im Folgenden verwenden.

(c) Geben Sie für einen allgemeinen Ring R und R-Moduln M und N eine Rechenvorschrift zur Berechnung von $\operatorname{Tor}_i^R(M, N)$ an.

(d) Berechnen Sie $\operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}[x]}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ in allen Graden i.

(e) Folgern Sie (oder zeigen Sie anderweitig), dass $\mathbb{Z}[x]$ kein Hauptidealring ist.

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 3

Aufgabe 3
(Seite 13)

Aufgabe 4
Diese Aufgaben hat vier Teilaufgaben, (a) bis (d). Pro Teilaufgabe sind genau 3 Antworten richtig, und es sind entsprechend maximal 3 Punkte zu erwerben. Sind Ihre Antworten bei einer Teilaufgabe nicht vollständig richtig, erhalten Sie als Punktzahl für diese Teilaufgabe die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

(a) Betrachten Sie ein kommutatives Dreieck in einer Kategorie $\mathbf{C}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Sind f und g Isomorphismen, so ist auch h ein Isomorphismus.
- ☐ Ist h ein Monomorphismus und f ein spaltender Monomorphismus, so ist h ein spaltender Monomorphismus.
- ☐ Ist f ein Monomorphismus und g ein Epimorphismus, so ist h ein Isomorphismus.
- ☐ Ist h ein Monomorphismus, so ist auch f ein Monomorphismus.
- ☐ Ist h ein Monomorphismus, so ist auch g ein Monomorphismus.
- ☐ Ist h ein spaltender Monomorphismus, so ist auch f ein spaltender Monomorphismus.

(b) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ In der Kategorie der abelschen Gruppen sind die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ein Anfangsobjekt.
- ☐ Fassen wir eine Menge mit einer Äquivalenzrelation als Kategorie auf, so gibt es darin stets ein Anfangsobjekt.
- ☐ Fassen wir eine halbgeordnete Menge als Kategorie auf, so gibt es darin genau dann ein Anfangsobjekt, wenn es darin ein kleinstes Element gibt.
- ☐ Fassen wir eine Gruppe als Kategorie auf, so gibt es darin stets ein Endobjekt.
- ☐ Ist X ein Anfangsobjekt einer Kategorie $\mathbf{C}$, so ist X ein Endobjekt in der dualen Kategorie $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$.
- ☐ In der Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen ist die leere Menge ein Anfangsobjekt.

(c) Sei R ein kommutativer Ring (assoziativ, mit Eins). In den folgenden Aussagen ist mit „Modul“, „Untermodul“, „Quotientenmodul“ usw. stets ein R-Modul, R-Untermodul, R-Quotientenmodul usw. gemeint. Welche dieser Aussagen sind im Allgemeinen richtig?

- ☐ Jeder freie Modul ist flach.
- ☐ Jeder Quotientenmodul eines freien Moduls ist frei.
- ☐ Jeder Untermodul eines freien Moduls ist frei.
- ☐ Jeder projektive Modul ist Untermodul eines freien Moduls.
- ☐ Jeder Untermodul eines freien Moduls ist projektiv.
- ☐ Jeder endlich-erzeugte Modul lässt sich auffassen als ein Quotientenmodul eines endlich-erzeugten freien Moduls.

(d) Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Alle Tensorprodukte $\otimes$ sind zu verstehen als Tensorprodukte $\otimes_{\mathbb{Z}}$, also als Tensorprodukte von abelschen Gruppen/$\mathbb{Z}$-Moduln.

- ☐ $\mathbb{Z}^{\oplus 3} \otimes \mathbb{Z}^{\oplus 3} \cong \mathbb{Z}^{\oplus 6}$
- ☐ $\mathbb{Z}/12 \otimes \mathbb{Z}/8 \cong \mathbb{Z}/4$
- ☐ $\mathbb{Z}/12 \otimes \mathbb{Z}/8 \cong \mathbb{Z}/24$
- ☐ $\mathbb{R} \otimes \mathbb{Z}/2 \cong 0$
- ☐ $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} \cong 0$
- ☐ $S^1 \otimes \mathbb{Q} \cong 0$

Bitte prüfen Sie abschließend die folgenden Angaben und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:

Name:	Jan Hennig
Matrikelnr.:	0123459789