Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
12.04.2024

Homologische Algebra
Blatt 1

Die Abgabe der Blätter ist nicht gefordert. Lösungen der Aufgaben werden in der Übung besprochen.

1 | Stehgreiffragen: Kategorien und Funktoren

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wie viele verschiedene[1] Kategorien mit 3 Objekten und 4 Morphismen gibt es?
(b) Gibt es eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit zwei Objekten A, B und 5 Morphismen, sodass $|\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)| = 1$ und $|\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)| = 2$?
(c) Sei X ein topologischer Raum. Definiere $\mathrm{Open}(X)$ durch:

Objekte: offene Teilmengen $U \subseteq X$

Morphismen: Inklusionen, d.h. $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Open}(X)}(U, V)$ enthält genau dann ein Element, wenn $U \subseteq V$ und ist sonst leer.

Definiert Open(X) eine Kategorie?
(d) Sei $n \in \mathbb{N}$. Definiere $\mathbf{Set}_{\leqslant n}$ durch:

Objekte: Mengen mit höchstens n Elementen

Morphismen: Abbildungen von Mengen

Definiert $\mathbf{Set}_{\leqslant n}$ eine Kategorie? Was ist wenn $\leqslant$ durch $\geqslant$ oder $=$ ersetzt wird?
(e) Definiere $\mathbf{Set}_{\textsf{non-const}}$ durch:

Objekte: Mengen mit mindestens 2 Elementen

Morphismen: Nicht-konstante Abbildungen von Mengen

Definiert $\mathbf{Set}_{\textsf{non-const}}$ eine Kategorie?
(f) Definiere $\mathbf{Set}_{\textsf{id, non-inv}}$ durch:

Objekte: Mengen

Morphismen: Abbildungen von Mengen, die entweder die Identität sind oder nicht-invertierbar

Definiert $\mathbf{Set}_{\textsf{id,non-inv}}$ eine Kategorie?
(g) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und c ein Objekt in $\mathcal{C}$. Definiere $\mathrm{const}_c \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ durch $\mathrm{const}_c(x) = c$ auf Objekten und $\mathrm{const}_c(f \colon x \to y) = \mathrm{id}_c$ auf Morphismen. Definiert const_c einen Funktor?
(h) Die Vergissfunktoren $\mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ und $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$, die einen topologischen Raum als Menge auffassen, bzw. eine abelsche Gruppe als Gruppe, haben einen entscheidenden Unterschied, wenn man sich das Verhalten auf den Morphismen anguckt. Welcher Unterschied ist das?

2 | Nicht alles definiert einen Funktor

Sei G eine Gruppe und $Z(G) = \{g \in G \mid hg = hg \quad \forall h \in H\}$ ihr Zentrum. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $Z \colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ keinen Funktor definiert.

(Hinweis: Betrachten Sie die folgenden Abbildungen symmetrischer Gruppen $S_2 \to S_3 \to S_2$)

Kennen Sie ein Beipiel (aus der linearen Algebra) für einen Funktor $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$?

---

[1] Wir haben noch nicht über verschiedene Äquivalenzbegriffe von Kategorien gesprochen. Hier ist die naive Variante gefragt (also „bis auf Umbenennung von Objekten und Morphismen“)

3 | Isomorphismen werden auf Isomorphismen abgebildet, aber nicht reflektiert

Sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$.

(a) Zeigen Sie: Ist $f\colon a \to b$ ein Isomorphismus, so auch $F(f)\colon F(a) \to F(b)$.
(b) Finden Sie ein Beispiel, bei dem $F(f)\colon F(a) \to F(b)$ ein Isomorphismus ist, aber $f\colon a \to b$ nicht.

4 | Simplexkategorie ★

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $[n]$ die Kategorie mit Objekten $\{0, \dots, n-1\}$ und jeweils genau einem Morphismus $f\colon a \to b$ wenn $a \leqslant b$ (es ist genau die Kategorie zugehörig zur Ordnung $\leqslant$ auf $\{0, \dots, n-1\}$).

(a) Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Beschreiben Sie $\mathrm{Fun}([0], \mathcal{C})$, $\mathrm{Fun}([1], \mathcal{C})$ und $\mathrm{Fun}([2], \mathcal{C})$.

Sei Δ die Kategorie mit Objekten $[n]$ und die Morphismen $[a] \to [b]$ sind gegeben durch $\mathrm{Fun}([a], [b])$.

(b) Zeigen Sie, dass sich jede Abbildung in $\mathrm{Fun}([a], [b])$ als endliche Komposition folgener Abbildungen schreiben lässt:

$$\delta_i^n\colon [n-1] \to [n], \quad \delta_i^n(k) = \begin{cases} k & , i < k \\ k+1 & , i \geqslant k \end{cases}$$

$$\sigma_i^n\colon [n+1] \to [n], \quad \sigma_i^n(k) = \begin{cases} k & , i \leqslant k \\ k-1 & , i > k \end{cases}$$

5 | Kommakategorien ★

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und c ein Objekt in $\mathcal{C}$. Definiere $\mathcal{C}/c$ (bzw. $c/\mathcal{C}$) durch:

Objekte: Paare $(a \in \mathcal{C}, f : a \to c)$ (bzw. $(a \in \mathcal{C}, f\colon c \to a)$)

Morphismen: $(a \in \mathcal{C}, f\colon a \to c) \to (b \in \mathcal{C}, g\colon b \to c)$ ist eine Abbildung $h\colon a \to b$, sodass $f = g \circ h$ (bzw. $(a \in \mathcal{C}, f\colon c \to a) \to (b \in \mathcal{C}, g\colon c \to b)$ ist eine Abbildung $h\colon a \to b$, sodass $g = h \circ f$)

(a) Zeigen Sie, dass dies eine Kategorie definiert.
(b) Beschreiben Sie $U/\,\mathrm{Open}(X)$ und $\mathrm{Open}(X)/U$ für beliebige offene Teilmengen U in einem topologischen Raum X.

Seien $F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ und $G\colon \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ zwei Funktoren. Definiere die Kommakategorie $F \downarrow G$ durch:

Objekte: Tripel $(d \in \mathcal{D}, e \in \mathcal{E}, (f\colon F(d) \to G(e)) \in \mathcal{C})$

Morphismen: $(d, e, f) \to (d', e', f')$ ist ein Paar $((h\colon d \to d') \in \mathcal{D}, (k\colon e \to e') \in \mathcal{E})$ sodass $G(k) \circ f = f' \circ F(h)$.

(c) Zeigen Sie, dass dies eine Kategorie definiert.
(d) Beschreiben Sie $c/\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}/c$ als Kommakategorien (Hinweis: Abhängig von der gewählten Konstruktion erhalten Sie nicht exakt das Gleiche wie oben definiert. Es reicht wenn Sie den Unterschied erklären).

Die Projektionsfunktoren $\mathrm{dom}\colon F \downarrow G \to \mathcal{D}$ und $\mathrm{cod} : F \downarrow G \to \mathcal{E}$ sind definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}((d, e, f\colon d \to e)) = d \quad &\text{and} \quad \mathrm{dom}((h\colon d \to d', k\colon e \to e')) = (h\colon d \to d') \\ \mathrm{cod}((d, e, f\colon d \to e)) = e \quad &\text{and} \quad \mathrm{cod}((h\colon d \to d', k\colon e \to e')) = (k\colon e \to e') \end{aligned}$$

(e) Beschreiben Sie die Funktoren dom und cod für Ihre Konstruktion von $c/\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}/c$.

(Hinweis: Alle Objekte, Morphismen und Bedingungen lassen sich besser durch Diagramme ausdrücken. Zeichnen Sie diese Diagramme.)

Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
19.04.2024

Homologische Algebra
Blatt 2

Die Abgabe der Blätter ist nicht gefordert. Lösungen der Aufagben werden in der Übung besprochen.

1 | Stehgreiffragen: Epis/Monos, initial/terminal und Moduln

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Erhalten Funktoren Epimorhismen (bzw. Monomorphismen)?
(b) Erhalten Funktoren spaltende Epimorphismen (bzw. spaltende Monomorphismen)?
(c) Angenommen eine Kategorie hat initiale und terminale Objekte, stimmen diese immer überein?
(d) Wahr oder falsch: Jeder Morphismus vom initialen Objekt ist ein Monomorphismus.
(e) Wahr oder falsch: Jeder Morphismus vom terminalen Objekt ist ein Monomorphismus.
(f) Hat die Kategorie **Ring** (Ringe mit 1 und unitalen Ringhomomorphismen) ein Nullobjekt?
(g) Hat die Kategorie **Field** (Körper mit unitalen Ringhomomorphismen) initiale/terminale Objekte?
(h) Was beschreiben die Kategorie $*/\mathbf{Top}$, bzw. $\mathbf{Top}/*$, wobei $*$ der einelementige Raum ist?
(i) Was beschreibt die Kategorie $F/\mathbf{Field}$, bzw. $\mathbf{Field}/F$?
(j) Hat die Kategorie $c/\mathcal{C}$ ein initiales oder terminales Objekt? Wenn ja, welches?
(k) Ist jeder Morphismus $f\colon A \to B$ in $\mathbf{Mod}_R$ Teil einer kurzen exakten Sequenz der Form $0 \to A \xrightarrow{f} B \to C \to 0$, für ein C? Wenn nicht, welche sind es?
(l) Ist jeder Morphismus $f\colon B \to C$ in $\mathbf{Mod}_R$ Teil einer kurzen exakten Sequenz der Form $0 \to A \to B \xrightarrow{f} C \to 0$, für ein A? Wenn nicht, welche sind es?

2 | Rund um Epis, Monos und Isos

Seien $f\colon x \to y$ und $g\colon y \to z$ Morphismen in $\mathcal{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann ein spaltender Epimorphismus ist, wenn die Postkomposition

$$f_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,x) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,y), \quad (h\colon c \to x) \mapsto (f \circ h\colon c \to y)$$

surjektiv für alle Objekte c aus $\mathcal{C}$ ist.
(b) Formulieren und beweisen Sie die duale Aussage für spaltende Monomorphismen.
(c) Zeigen Sie: Ist f ein Monomorphism und spaltender Epimorphismus, so ist f ein Isomorphismus.
(d) Zeigen Sie: Ist f ein Epimorphismus und spaltender Monomorphismus, so ist f ein Isomorphismus.
(e) Zeigen Sie: Sind f und g Monomorphismen (bzw. Epimorphismen), so auch $g \circ f\colon x \to z$.
(f) Zeigen Sie: Ist $g \circ f\colon x \to z$ mono (bzw. epi), so ist f mono (bzw. g epi).

3 | Epi, aber nicht surjektiv und mono, aber nicht injektiv

Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Begriffe „injektiv“ und „surjektiv“ (sofern definiert) kategorientheoretisch nicht notwendigerweise die richtigen Begriffe liefern.

(a) Zeigen Sie, dass die Inklusion $\iota\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ ein nicht-surjektiver Epimorphismus in der Kategorie **Ring** ist.
(b) Zeigen Sie, dass $\pi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ in der Kategorie der divisiblen Gruppen (Gruppen $(G,\cdot)$ mit der Eigenschaft, dass es für jedes $x \in G$ und jedes $\mathbb{N}_{>0}$ ein $y \in G$ gibt mit $y^n = x$) ein nicht-injektiver Monomorphismus ist.
(Hinweis: Sei G divisibel und $f, g\colon G \to \mathbb{Q}$ zwei verschiedene Gruppenhomomorphismen mit $\pi \circ f = \pi \circ g$. Wie unterscheiden sich $f(x)$ und $g(x)$ in $\mathbb{Q}$ für ein $x \in G$?)

4 | Wie exakt ist eigentlich Hom?

Sei $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz in $\mathbf{Mod}_R$ und M ein R-Modul.

(a) Zeigen Sie, dass der kontravariante Homfunktor $\mathrm{Hom}(-, M)$ linksexakt ist, d.h. die folgende Sequenz ist exakt:
$$0 \to \mathrm{Hom}(C, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(B, M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(A, M).$$

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}(-, M)$ im Allgemeinen nicht exakt ist, d.h. f^* ist nicht surjektiv.

(c) Sei $R = \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(-, G)$ genau dann exakt ist, wenn G divisibel ist. (Hinweis: Für „divisibel $\Rightarrow$ exakt“ nutze das Lemma von Zorn)

Für einen beliebigen Ring gilt „exakt $\Rightarrow$ divisibel“ (gleiches Argument), aber die Umkehrung im Allgemeinen nicht.

(d) Zeigen Sie, dass der kovariante Homfunktor $\mathrm{Hom}(M, -)$ linksexakt ist, d.h. die folgende Sequenz ist exakt:
$$0 \to \mathrm{Hom}(M, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(M, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(M, C).$$

(e) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}(M, -)$ im Allgemeinen nicht exakt ist, d.h. g_* ist nicht surjektiv.

(f) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}(R^n, -)$ exakt ist.

(g) Sei $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, -)$ exakt ist.

Der letzte Teil zeigt, dass es mehr Moduln als nur R^n in $\mathbf{Mod}_R$ geben kann, für die der kontravariante Homfunktor exakt ist.

5 | Das starke 4-Lemma ★

Betrachten Sie folgendes kommutative Diagramm in $\mathbf{Mod}_R$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[d, "\delta"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D'
\end{tikzcd}$$

Zusätzlich seien beide Zeilen exakt, α ein Epimorphismus und δ ein Monomorphismus.

(a) Zeigen Sie: $g(\ker(\beta)) = \ker(\gamma)$.

(b) Zeigen Sie: $\mathrm{im}(\beta) = (g')^{-1}(\mathrm{im}(\gamma))$.

(c) Nutzen Sie das starke 4-Lemma um das (kurze) 5-Lemma aus der Vorlesung zu zeigen.

Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
26.04.2024

Homologische Algebra
Blatt 3

Die Abgabe der Blätter ist nicht gefordert. Lösungen der Aufagben werden in der Übung besprochen.

1 | Stehgreiffragen: Etwas zu Moduln und Kategorienäquivalenz

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wahr oder falsch: Eine kurze exakte Sequenz in $\mathbf{Mod}_R$ spaltet genau dann, wenn $\mathrm{Hom}(M, -)$ für jedes R-Modul M exakt ist.
(b) Wie viele abelsche Gruppen von Ordnung p für p prim, 64 und 360 gibt es?
(c) Ist $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring?
(d) Wahr oder falsch: Gegeben sei folgendes kommutative Diagramm von kurzen exakten Sequenzen,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

wobei α und γ Isomorphismen sind, dann ist $B \cong B'$.
(e) Wahr oder falsch: Das Skeleton eines Gruppoids hat nur ein einziges Objekt.

2 | Lokalisierung ist exakt

Sei R ein kommutativer Ring und S eine unter Multiplikation abgeschlossene Teilmenge von R (d.h. $1 \in S$ und $s, s' \in S \Rightarrow ss' \in S$). Definiere die Lokalisierung $S^{-1}R$ durch

$$S^{-1}R = (R \times S)/\sim, \quad (x, s) \sim (y, t) \Longleftrightarrow \exists u \in S : (xt - ys)u = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Definiere die Addition und Multiplikation durch:

$$(x, s) + (y, t) = (xt + ys, st), \qquad (x, s) \cdot (y, t) = (xy, st).$$

(b) Zeigen Sie, dass die Operationen auf $S^{-1}R$ wohldefiniert sind.
(c) Zeigen Sie, dass $S^{-1}R$ ein Ring ist.
(d) Zeigen Sie, dass $S^{-1}R = 0 \Longleftrightarrow 0 \in S$.

Die obige Definition kann direkt wörtlich auf R-Moduln verallgemeinert werden. Sei M ein R-Modul. Das lokalisierte Modul $S^{-1}M$ ist ein $S^{-1}R$-Modul.

(e) Zeigen Sie, dass $S^{-1}\colon \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_{S^{-1}R}$ ein exakter Funktor ist.

3 | Gruppenringe

Sei R ein kommutativer Ring und G eine Gruppe. Elemente im Gruppenring $R[G]$ sind formale R-Linearkombinationen von Elementen aus G, d.h.

$$R[G] = \left\{ \sum_{g \in G} f(g) \cdot g \mid f\colon G \to R, f(g) \neq 0 \text{ für nur endlich viele } g \in G \right\}.$$

Definiere die Addition und Multiplikation wie folgt:

$$\left(\sum_{g\in G} f(g)\cdot g\right) + \left(\sum_{g\in G} h(g)\cdot g\right) = \sum_{g\in G} (f(g)+h(g))\cdot g$$
$$\left(\sum_{g\in G} f(g)\cdot g\right) \cdot \left(\sum_{g\in G} h(g)\cdot g\right) = \sum_{g,g'\in G} (f(g)h(g'))\cdot gg'$$

(a) Zeigen Sie, dass $R[G]$ eine R-Algebra ist.
(b) Sei $R \neq 0$. Zeigen Sie, dass $R[G]$ genau dann kommutativ ist, wenn G abelsch ist.
(c) Zeigen Sie, dass $R[G]$ nicht-triviale Nullteiler hat, wenn G Elemente endlicher Ordnung hat.

Kaplanskys Vermutung ist „G torsionsfrei $\Rightarrow R[G]$ hat keine nicht-trivialen Nullteiler“. Auch wenn sie für viele Klassen von Gruppen bekannt ist, ist sie im Allgemeinen offen.

4 | Invariante Basis Eigenschaft

Ein Ring hat die „invariante Basis Eigenschaft“, wenn $R^m \cong_{\mathbf{Mod}_R} R^n \Rightarrow m = n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass ein kommutativer Ring die invariante Basis Eigenschaft hat.
(Hinweis: Krulls Theorem besagt, dass jeder Ring ein maximales Ideal besitzt.)

Die Aussage gilt für jeden Ring, der einen Ringhomomorphismus zu einem Divisionsring hat.

(b) Finden Sie einen nicht-trivialen Ring, der nicht die invariante Basis Eigenschaft besitzt.
(Hinweis: Starten Sie mit einem freien R-Modul von unendlichem Rang für beliebiges R.)

Die folgenden Aussagen sind nicht-äquivalente Abwandlungen der obigen Eigenschaft.

(i) $R^m \cong R^n \Rightarrow m = n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ (invariante Basis Eigenschaft),
(ii) $R^m \cong R^n \oplus K \Rightarrow m \geqslant n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$,
(iii) $R^n \cong R^n \oplus K \Rightarrow K = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei $R \neq 0$.

(c) Zeigen Sie (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i).

Es gibt Gegenbeispiele für die jeweiligen umgekehrten Richtungen.

Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
03.05.2024

Homologische Algebra
Blatt 4

---

1 | Stehgreiffragen

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein treuer Funktor. Wahr oder falsch: $F(f) = F(g) \Rightarrow f = g$.
(b) Seien G, H Gruppen. Was sind die natürlichen Transformationen $\eta\colon S \Rightarrow T$ für $S, T\colon G \to H$?

2 | Voll, treu und volltreu

Sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor.

(a) Zeigen Sie: F treu $\Rightarrow$ F reflektiert Monomorphismen.
(b) Zeigen Sie: F treu $\Rightarrow$ F reflektiert Epimorphismen.
(c) Zeigen Sie: F volltreu $\Rightarrow$ F reflektiert Isomorphismen.
(d) Zeigen Sie: F reflektiert Isomorphismen und voll $\Rightarrow$ F ist wesentlich injektiv (injektiv auf Isomorphieklassen von Objekten).

Also ist jeder injektive/surjektive Morphismus ein Mono-/Epimorphismus und jeder volltreue Funktor ist wesentlich injektiv.

3 | Spaltung in freie Gruppe und Torsionsanteil ist nicht natürlich

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Zerlegung einer endlich erzeugten abelschen Gruppe in freien und Torsionsanteil nicht natürlich ist.

(a) Beschreiben Sie alle natürlichen Transformationen $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathbf{Ab}_{fg}} \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{Ab}_{fg}}$.
(b) Nehmen Sie an, dass $A \cong A/A_{\mathrm{tors}} \oplus A_{\mathrm{tors}}$ natürlich ist und führen Sie dies zu einem Widerspruch.

Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
10.05.2024

Homologische Algebra
Blatt 5

---

1 | Stehgreiffragen: Repreäsentierbarkeit

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Was sind die repräsentierende Objekte für die Funktoren, die eine kleine Kategorie auf die Menge der Objekte/Morphismen/komponierbaren Morphismen abbildet?
(b) Was ist das repräsentierende Objekt für die Identität $\mathrm{id}_{\mathbf{Set}} \colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$?

2 | Repräsentierbarkeit

Finden Sie die representierenden Objekte für die folgenden Funktoren:

(a) $\mathrm{Hom}(- \times A, B) \colon \mathbf{Set}^{op} \to \mathbf{Set}$, der eine Menge X auf die Menge der Abbildungen $X \times A \to B$ abbildet.
(b) $\mathcal{T} \colon \mathbf{Top}^{op} \to \mathbf{Set}$, der einen topologischen Raum auf die Menge der offenen Abbildungen schickt und stetige Abbildungen auf deren Urbildfunktion
(c) Was ändert sich, wenn für $\mathcal{T} \colon \mathbf{Top}^{op} \to \mathbf{Set}$ abgeschlossene Mengen genommen werden?
(d) $\mathrm{Path} \colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$, der einen topologischen Raum auf die Menge der Pfade abbildet.
(e) $\mathrm{Loop} \colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Set}$, der einen topologischen Raum auf die Menge der (punktierten) Schleifen abbildet.

3 | Nicht-Repräsentierbarkeit

Es gibt den Slogan „die meisten Funktoren sind nicht repräsentierbar“.

(a) Zeigen Sie, dass der kovariante(!) Potenzmengenfunktor nicht repräsentierbar ist.
(b) Zeigen Sie, dass repräsentierbare Funktoren $F \colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ Monomorphismen erhalten.

4 | edaYon oder: Wie falsch dualisiert wurde

Es gibt das Yoneda Lemma für ko- und kontravariante Funktoren. Folgende Version gibt es aber nicht. Sei $F \colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ein Funktor und c ein Objekt von $\mathcal{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass es keine natürliche Bijektion $\mathrm{Hom}(F, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, -)) \cong F(c)$ gibt.
(b) Können Sie den Fehler identifizieren, der hier bei dualisieren passiert ist?

5 | Äquivalenzen sind verträglich mit Repräsentierbarkeit ★

Seien $F \colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ und $G \colon \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ zwei Funktoren, $H \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien, sodass GH und F natürlich isomorph sind.

(a) Zeigen Sie: G ist repräsentierbar $\Rightarrow$ F ist repräsentierbar.
(b) Zeigen Sie: F ist repräsentierbar $\Rightarrow$ G ist repräsentierbar.

Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
17.05.2024

Homologische Algebra
Blatt 6

---

1 | Stehgreiffragen: (Ko)Produkte und (Ko)Kerne

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ Kategorien mit Produkten und $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Wie ist die kanonische Abbildung $F(X \times Y) \to F(X) \times F(Y)$ definiert?
(b) Wahr oder falsch: Jeder Funktor **Set** $\to$ **Set** erhält Produkte.
(c) Was sind Produkte und Koprodukte in partiell geordneten Mengen?
(d) Was sind Produkte und Koprodukte in der Kategorie der natürlichen Zahlen und Morphismen $k \to n$ genau dann, wenn $k \mid n$ („k teilt n“)?
(e) Wie sehen Kerne und Kokerne in der Kategorie **Ring** aus?
(f) Was bedeutet es für eine Kategorie mit einem Objekt, Produkte zu besitzen? Können Sie ein nicht-triviales Beispiel finden?

2 | (Ko)Produkte von Funktoren

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien.

(a) Zeigen Sie: $\mathcal{D}$ hat binäre Produkte $\Rightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ hat binäre Produkte.
(b) Zeigen Sie: $\mathcal{D}$ hat binäre Koprodukte $\Rightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ hat binäre Koprodukte.

3 | Produkterhaltend oder nicht produkterhaltend

Sei $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor zwischen Kategorien mit Produkten.

(a) Finden Sie einen Funktor F mit $F(A \times B) \cong F(A) \times F(B)$ für alle Objekte A und B, der nicht produkterhaltend ist.
(b) Formulieren Sie genau, was der Unterschied ist.

4 | Binäre Produkte + terminale Objekt $\Rightarrow$ alle endlichen Produkte

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit binären Produkten und einem terminalen Objekt.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ alle endlichen Produkte hat.
(b) Formulieren Sie die duale Aussage.

(Hinweis: Es gibt mehrere Wege endliche Produkte aus binären zu bauen. Warum sind die äquivalent?)

5 | In $\mathbf{Mod}_R$: Kern = Mono = monisch

Sei $f \colon A \to B$ ein Morphismus in $\mathbf{Mod}_R$.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
   (i) f ist ein Kern, d.h. es gibt einen Morphismus $g \colon B \to C$ mit $f = \ker(g)$.
   (ii) f ist ein Monomorphismus, d.h. für $h_1, h_2 \colon T \to A$ mit $f \circ h_1 = f \circ h_2$ folgt $h_1 = h_2$.
   (iii) f ist monisch, d.h. für $h \colon T \to A$ mit $f \circ h = 0$ folgt $h = 0$.
(b) Formulieren Sie die duale Aussage.

Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
24.05.2024

Homologische Algebra
Blatt 7

1 | Stehgreiffragen: Limes und Kolimes

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wie sehen die Indexkategorien für Produkte und Koporodukte aus?
(b) Was ist der Limes des Diagramms $* \to S^1 \leftarrow \mathbb{R}$, wobei $\mathbb{R} \to S^1$ die universelle Überlagerung ist?
(c) Was ist der Kolimes des Diagramms $\mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}$ in **Grp**?
(d) Wie kann der Kern einer Abbildung in $\mathbf{Mod}_R$ als Limes aufgefasst werden?
(e) Was ist der Limes in **Set** eines $\mathbb{N}$ indiziereten Diagramms, wobei alle $X_i \leftarrow X_{i+1}$ injektiv sind?
(f) Was ist der Kolimes in **Set** eines $\mathbb{N}$ indiziereten Diagramms, wobei alle $X_i \to X_{i+1}$ injektiv sind?
(g) Gegeben sein $f_{i,j} \colon A_i \to B_j$ für $(i, j) \in I \times J$. Welches von beiden ist die kanonische Abbildung, $\prod_{i \in I} A_i \to \coprod_{j \in J} B_j$ oder $\coprod_{i \in I} A_i \to \prod_{j \in J} B_j$, und wie ist sie definiert?

2 | Faserprodukte entlang Monos (und Epis)

Sei das folgende Diagramm ein Faserproduktdiagramm

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & A. \end{tikzcd}$$

(a) Zeigen Sie: $f \colon B \to A$ ist ein Monomorphismus $\Rightarrow f' \colon P \to C$ ein Monomorphismus ist.
(b) Finden Sie ein Gegenbeispiel für: $f \colon B \to A$ Epimorphismus $\Rightarrow f' \colon P \to C$ Epimorphismus. (Hinweis: Probieren Sie eine Kategorie in der sich Epimorphismen anders als in **Set** verhalten)
(c) Zeigen Sie: $f \colon B \to A$ Isomorphismus $\Rightarrow f' \colon P \to C$ Isomorphismus.

3 | Faserprodukte komponieren

Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\gamma"'] & B' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta"'] & A' \arrow[d, "\alpha"] \\ C \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

und sei B' das Faserprodukt von $f \colon B \to A$ und $\alpha \colon A' \to A$.

(a) Zeigen Sie, dass C' genau dann das Faserprodukt von $g \colon C \to B$ und $\beta \colon B' \to B$ ist, wenn es das Faserprodukt von $f \circ g \colon C \to A$ und $\alpha \colon A' \to A$ ist.

4 | $\mathbf{Mod}_R$ ist (ko)vollständig

Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt (ko)vollständig, wenn alle kleinen Diagramme einen (Ko)Limes in $\mathcal{C}$ haben, d.h. für jede kleine Indexkategorie $\mathcal{I}$, besitzt jeder Funktor $F \colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ einen (Ko)Limes.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{Mod}_R$ kovollständig ist.
(b) Zeigen oder widerlegen Sie: $\mathbf{Mod}_R$ is vollständig.

Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
30.05.2024

Homologische Algebra
Blatt 8

1 | Stehgreiffragen: Tensorprodukt

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wahr oder falsch: Das Tensorprodukt in $\mathbf{Mod}_R$ ist das kategorielle Produkt/Koprodukt.
(b) Was ist $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
(c) Was ist $R[x] \otimes_R R[y]$?
(d) Was ist $R/I \otimes_R M$, für ein Ideal $I \subseteq R$?
(e) Wahr oder flasch: Es gilt $(M \oplus M') \otimes_R N \cong (M \otimes_R N) \oplus (M' \otimes_R N)$ in $\mathbf{Mod}_R$.
(f) Wahr oder falsch: Es gilt $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$.
(g) Wahr oder falsch: Es gilt $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$.
(h) Wahr oder falsch: $A \otimes_{\mathbb{Z}} A = 0 \Rightarrow A = 0$ in $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}}$.
(i) Sei K/F eine Körpererweiterung. Ist $K \otimes_F K$ ein Körper?

2 | Wie exakt ist eigentlich das Tensorprodukt?

Sei $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz in $\mathbf{Mod}_R$ und M ein R-Modul.

(a) Zeigen Sie, dass der kontravariante Funktor $- \otimes_R M$ rechtsexakt ist, d.h. die folgende Sequenz ist exakt:

$$A \otimes_R M \xrightarrow{f \otimes_R id_M} B \otimes_R M \xrightarrow{g \otimes_R id_M} C \otimes_R M \longrightarrow 0$$

(b) Zeigen Sie, dass $- \otimes_R M$ im Allgemeinen nicht exakt ist, d.h. $f \otimes_R \mathrm{id}_M$ ist nicht injektiv.
(c) Sei $M \cong R^{\oplus I}$ frei. Zeigen Sie, dass $- \otimes_R M$ exakt ist.

Ein R-Modul M heißt flach, wenn $- \otimes_R M$ exakt ist.

(d) Sei C flach. Zeigen Sie, dass die folgende Sequenz, für beliebiges M, exakt ist:

$$0 \longrightarrow A \otimes_R M \xrightarrow{f \otimes_R id_M} B \otimes_R M \xrightarrow{g \otimes_R id_M} C \otimes_R M \longrightarrow 0$$

(e) Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_2 \times \{0\} \in \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2}$ flach, aber nicht frei ist.

3 | Tensorprodukte aus der Geometrie ★

Die algebraische Geometrie liefert ein nützliches Wörterbuch, um geometrische Objekte (Nullstellen von Polynomen $f \in \mathbb{C}[x,y]$) in algebraische Objekte (Quotienten $\mathbb{C}[x,y]/(f)$) zu übersetzen.

(a) Berechnen Sie, $\mathbb{C}[x,y]/(xy-1) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x,y]/(x^2-y)$
(b) Berechnen Sie, $\mathbb{C}[x,y]/(xy-1) \otimes_{\mathbb{C}[x,y]} \mathbb{C}[x,y]/(x^2-y)$

Diese Berechnungen entsprechen den beiden Faserprodukten

$$\begin{tikzcd} \{xy-1=0\} \times \{x^2-y=0\} \arrow[r] \arrow[d] & \{x^2-y=0\} \arrow[d] \\ \{xy-1=0\} \arrow[r] & \{*\} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \{xy-1=0\} \cap \{x^2-y=0\} \arrow[r] \arrow[d] & \{x^2-y=0\} \arrow[d] \\ \{xy-1=0\} \arrow[r] & \mathbb{C}^2 \end{tikzcd}$$

Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
07.06.2024

Homologische Algebra
Blatt 9

---

1 | Stehgreiffragen: Tensorprodukt

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wahr oder falsch: Für $A \to B \to C$ exakt, ist auch $A \otimes_R M \to B \otimes_R M \to C \otimes_R M$ exakt.
(b) Wahr oder falsch: Tensorpordukte vertauschen mit Produkten.

2 | R-biadditiv $\neq$ R-bilinear

Sei $R = \{m + n\sigma \mid m, n \in \mathbb{Z}, \sigma^2 = 1\}$. Sei $A = B = \mathbb{Z}$, mit der R-Modulstruktur gegeben durch $(m + n\sigma)x = (m - n)x$ wobei $x \in \mathbb{Z}$. Sei $G = \mathbb{Z}$, mit der R-Modulstruktur gegeben durch $(m + n\sigma)x = (m + n)x$. Definiere $f\colon A \times B \to G$ durch die Multiplikation $(a, b) \mapsto ab$.

(a) Zeigen Sie, dass die obigen Definitionen für A, B und G wirklich R-Modulstrukturen definieren.
(b) Zeigen Sie, dass f R-biadditiv ist.
(c) Zeigen Sie, dass f nicht R-bilinear ist.

3 | Tensorvielfache endlich-erzeugter Moduln verschwinden nicht

Sei $M \neq 0$ ein endlich-erzeugter R-Modul.

(a) Zeigen Sie, dass $M^{\otimes k} \neq 0$ für $k > 0$,
(b) Finden Sie ein Beipiel für $M^{\otimes k} = M$.

Warum ist das kein Widerspruch zu einer voherigen Aussage?

4 | Invarianten und Koinvarianten

Sei G eine Gruppe und A ein links $\mathbb{Z}[G]$-Modul. Definiere die $\mathbb{Z}$-Moduln

(i) Invarianten von A: $A^G = \{a \in A \mid g \cdot a = a \ \ \forall g \in G\}$,
(ii) Koinvarianten von A: $A_G = A/\langle g \cdot a - a \mid g \in G,\ a \in A\rangle$.

Fasse $\mathbb{Z}$ als links $\mathbb{Z}[G]$-Modul mittels trivialer Wirkung auf ($(g, n) \mapsto n$) und sei $\tau(A)$ das zu A gehörige rechts $\mathbb{Z}[G]$-Modul ($(a, g) \mapsto g^{-1} \cdot a$)

(a) Zeigen Sie, dass $A^G \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]-\mathbf{Mod}}(\mathbb{Z}, A)$, $a \mapsto (\varphi_a\colon n \mapsto n \cdot a)$ einen natürlichen Isomorphismus definiert.
(b) Zeigen Sie, dass $A_G \to \tau(A) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}$, $[a] \mapsto a \otimes 1$ einen natürlichen Isomorphismus definiert.
(c) Zeigen Sie für G endlich, dass $(\mathbb{Z}[G])^G \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$.
(d) Zeigen Sie für G unendlich, dass $(\mathbb{Z}[G])^G \cong_{\mathbb{Z}} 0$.
(e) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}[G])_G \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$.

Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
14.06.2024

Homologische Algebra
Blatt 10

---

1 | Stehgreiffragen: Adjunktion

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Welches ist der Linksadjungierte in der „frei, vergesslich " Adjunktion?
(b) Seien $F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}\colon G$ adjungierte Funktoren. Wahr oder falsch: Der zugehörige Isomorphismus $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$ schickt Isomorphismen auf Isomorphismen.
(c) Die Inklusion von partiell geordneten Mengen $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ hat einen links- und einen rechtsadjungierten Funktor. Wie sehen diese aus?
(d) Wahr oder falsch: Es gibt eine $\mathbb{Z}$-indizierte Kette von Funktoren F_i mit $F_i \dashv F_{i+1}$.
(e) Wahr oder falsch: Ist $F \dashv G$ und $G \dashv H$, so gilt $F \dashv H$.
(f) Wahr oder falsch in $\mathbf{Mod}_R$:
  (i) $\mathrm{Hom}(A, -) \;\dashv\; A \otimes_R -$.
  (ii) $A \otimes_R - \;\dashv\; \mathrm{Hom}(A, -)$.
  (iii) $\mathrm{Hom}(-, A) \;\dashv\; A \otimes_R -$.
  (iv) $A \otimes_R - \;\dashv\; \mathrm{Hom}(-, A)$.

2 | Keine Adjungierten für die folgenden Funktoren von Körpern

Sei U jeweils der zugehörige Vergissfunktor.

(a) Zeigen Sie, dass $U\colon \mathbf{Field} \to \mathbf{Ring}$, $\mathbf{Ab}$ oder $\mathbf{Set}$ weder einen Links- noch einen Rechtsadjungierten hat.
(b) Zeigen Sie, dass $(-)^{\times}\colon \mathbf{Field} \to \mathbf{Ab}$ weder einen Links- noch einen Rechtsadjungierten hat.

(Hinweis: Alle vier Fälle können zusammen behandelt werden)

3 | Komposition von Adjunktionen

Seien $F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}\colon G$ und $F'\colon \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{E}\colon G'$ zwei Paare von adjungierten Funktoren ($F \dashv G$, $F' \dashv G'$).

(a) Zeigen Sie, dass $F'F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E}\colon GG'$ ein Paar von adjungierten Funktoren ist ($F'F \dashv GG'$).

4 | Zwei bekannte Funktoren, ein außergewöhnlicher und eine Adjunktion $f_* \dashv f^{-1} \dashv f_!$

Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung von Mengen und $P(M)$ die Potenzmenge von M aufgefasst als partiell geordnete Menge mittels Inklusion. Definiere die folgenden Funktoren:

(i) Direktes Bild: $f_*\colon P(A) \to P(B)$, mit $M \mapsto f(M)$,
(ii) Inverses Bild: $f^{-1}\colon P(B) \to P(A)$, mit $M \mapsto f^{-1}(M)$,
(iii) Außergewöhnliches direktes Bild: $f_!\colon P(A) \to P(B)$, mit $M \mapsto \{b \in B \mid f^{-1}(b) \subseteq M\}$,

Vergewissern Sie sich zuerst, dass dies wirklich Funktoren definieren.

(a) Zeigen Sie, dass f^{-1} mit Limiten und Kolimiten vertauscht.
(b) Zeigen Sie, dass $f_* \dashv f^{-1}$.
(c) Zeigen Sie, dass $f^{-1} \dashv f_!$.

Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
21.06.2024

Homologische Algebra
Blatt 11

---

1 | Stehgreiffragen: Kettenkomplexe

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wahr oder falsch: $0 \to C_*$ ist genau dann ein Quasiisomorphismus, wenn C_* exakt ist.
(b) Wahr oder falsch: Homologie vertauscht mit direkten Summen, d.h. $\bigoplus_{i \in I} H_n(A_i) \cong H_n(\bigoplus_{i \in I} A_i)$.
(c) Wahr oder falsch: Homologie vertauscht mit direkten Produkten, d.h. $\Pi_{i \in I} H_n(A_i) \cong H_n(\Pi_{i \in I} A_i)$.
(d) Was ist die Homologie von $\ldots \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \ldots$?
(e) Was ist die Homologie von $\ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \to \cdots \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0 \to \ldots$?
(f) Wahr oder falsch: Für einen Kettenkomplex C_* ist $0 \to C_* \xrightarrow{\cdot n} C_* \to C_*/nC_* \to 0$ immer exakt.

2 | Kerne und Kokerne können gradweise berechnet werden

Sei $f\colon A_* \to B_*$ ein Kettenkomplexmorphismus. Definiere die Kettenkomplexe $\ker(f)_n = \ker(f_n)$ und $\operatorname{coker}(f)_n = \operatorname{coker}(f_n)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\ker(f)_*$ mit dem durch d^A_* induziertem Differential einen Kettenkomplex definiert.
(b) Zeigen Sie, dass $\ker(f)_*$ ein Kern von f in der Kategorie der Kettenkomplexe ist.
(c) Zeigen Sie die analogen Aussagen für den Kokern $\operatorname{coker}(f)_*$.
(d) Folgern Sie, dass die Abbildung f genau dann ein Monomorphismus in der Kategorie der Kettenkomplexe ist, wenn $f_n\colon A_n \to B_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ ein Monomorphismus ist (und die gleiche Aussage für Epimorphismen).

3 | Quasiisomorphismen über Kerne und Kokerne bestimmen

Sei $f\colon A_* \to B_*$ ein Kettenkomplexmorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass wenn $\ker(f)_*$ und $\operatorname{coker}(f)_*$ exakt sind, f ein Quasiisomorphismus ist.
(b) Finden Sie ein Gegenbeispiel für die Umkehrung, d.h. einen Quasiisomorphismus f aber $\ker(f)_*$, $\operatorname{coker}(f)_*$ sind nicht exakt.
(Hinweis: wählen Sie A_* und B_* exakt)

4 | Spaltend exakte Kettenkomplexe

Ein Kettenkomplex C_* heißt spaltend, wenn es Morphismen $s_n\colon C_n \to C_{n+1}$ mit $d_n = d_n \circ s_{n-1} \circ d_n$ für alle n gibt und spaltend exakt, wenn der Komplex zusätzlich exakt ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\ldots \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \overset{\cdot 2}{\to} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \overset{\cdot 2}{\to} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \ldots$ exakt ist, aber nicht spaltet.
(b) Zeigen Sie, dass C_* genau dann spaltet, wenn es eine Zerlegung von R-Moduln der Form $C_n \cong Z_n \oplus B'_n$ und $Z_n = B_n \oplus H'_n$ gibt, wobei Z_n die Zykel von C_n sind und B_n die Ränder.
(c) Zeigen Sie, dass ein spaltender Kettenkomplex C_* genau dann exakt ist, wenn $H'_n = 0$.
(d) Zeigen Sie, dass C_* genau dann spaltend exakt ist, wenn die Identität $\mathrm{id}_{C_*}\colon C_* \to C_*$ nullhomotop ist.

Betrachte den Kettenkomplex $H_*(C)$ mit $(H_*(C))_n = H_n(C)$ und trivialen Differentialen.

(e) Zeigen Sie, dass C_* und $H_*(C)$ genau dann kettenhomotopieäquivalent sind, wenn C_* spaltet.

5 | Homologie von Graphen ★

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein endlicher ungerichteter Graph. Fixiere eine Orientierung für jede Kante. Definiere den Kettenkomplex C_* durch die freien R-Moduln $C_0 = R[V]$, $C_1 = R[E]$ und $C_n = 0$ für $n \neq 0, 1$. Das Differential $d_1 \colon C_1 \to C_0$ ist gegeben durch die Inzidenzmatrix, d.h. diese $|V| \times |E|$ Matrix hat an Stelle (i, j) den Eintrag $+1$, falls die Kante e_j in v_i startet, den Eintrag -1, falls die Kante e_j in v_i endet, und 0 sonst.

(a) Zeigen Sie für Γ zusammenhängend, dass $H_0(C)$ und $H_1(C)$ freie R-Moduln sind und es gilt:

$$\mathrm{rk}_R(H_0(C)) = 1, \qquad \mathrm{rk}_R(H_1(C)) = |V| - |E| + 1$$

(Was passiert für Γ nicht-zusammenhängend?)

Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
21.06.2024

Homologische Algebra
Blatt 12

1 | Stehgreiffragen: Abelsche Kategorien

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Welche der folgenden Kategorien sind abelsch: $\mathbf{Mod}_R$, $\mathbf{Mod}_R^{op}$, $[n]$ für $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, **Set**, **Grp**, **Ab**, **Ring**, **Field**, **Top**, $\mathbf{Top}_*$, endlich erzeugte abelsche Gruppen, endliche abelsche Gruppen, torsionsfreie abelsche Gruppen?
(b) Wahr oder faslch: Für eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ ist auch $\mathcal{A}^{op}$ abelsch.
(c) Wahr oder falsch: Die Funktorkategorie $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ für eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$, ist abelsch.
(d) Wie kann die additive Struktur auf den Hom-Mengen aus den anderen Axiomen für additive Kategorien konstruiert werden?

2 | Mono-Epi Faktorisierung in abelschen Kategorien

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie mit den nötigen (Ko-)Kernen und $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$.

(a) Zeigen Sie, dass f faktorisiert als $X \xrightarrow{e} \mathrm{coim}(f) \xrightarrow{f'} \mathrm{im}(f) \xrightarrow{m} Y$.
(b) Zeigen Sie, dass $e\colon X \to \mathrm{coim}(f)$ ein Epimorphismus ist.
(c) Zeigen Sie, dass $m\colon \mathrm{im}(f) \to Y$ ein Monomorphismus ist.
(d) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Zeigen Sie, dass $f'\colon \mathrm{coim}(f) \to \mathrm{im}(f)$ ein Isomorphismus ist.

3 | Links-/Rechtsexaktheit

Sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen (für Linksexaktheit von F):
  (i) Für $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ exakt, ist $0 \longrightarrow X \xrightarrow{F(f)} Y \xrightarrow{F(g)} Z$ exakt.
  (Hinweis: Die linke Sequenz ist genau dann exakt, wenn f ein Kern von g ist. (Warum?))
  (ii) Für $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ exakt, ist $0 \longrightarrow X \xrightarrow{F(f)} Y \xrightarrow{F(g)} Z$ exakt.
  (iii) F erhält Kerne.
(b) Formulieren Sie die analogen Aussagen für Rechtsexaktheit.
(c) Folgern Sie, dass Exaktheit äquivalent zu Links- und Rechtsexaktheit ist.

4 | Homotopiekategorie

Betrachte die Kategorie von Kettenkomplexen $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ für eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$. Wir haben gesehen, dass die Homologiefunktoren H_n kettenhomotopieinvariant sind. Ziel ist es zu zeigen, dass diese Funktoren durch eine geeignetet Kategorie $\mathcal{K}$ faktorisieren.

(a) Zeigen Sie, dass Kettenhomotopie $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Kom}(\mathcal{A})}(C, D)$ definiert.
(b) Seien $u\colon B \to C$, $f, g\colon C \to D$, $v\colon D \to E$ Morphismen. Zeigen Sie, dass $f \sim g \Rightarrow vfu \sim vgu$.
  (Folgern Sie, dass es eine Kategorie $\mathcal{K}$ gibt, deren Objekte Kettenkomplexe sind und die Morphismen Homotopieklassen von Morphismen.)
(c) Seien $f_0, f_1, g_0, g_1\colon C \to D$ Morphismen. Zeigen Sie $f_0 \sim g_0, f_1 \sim g_1 \;\Rightarrow\; f_0 + f_1 \sim g_0 + g_1$.
  (Folgern Sie, dass $\mathcal{K}$ eine additive Kategorie ist und $\mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}$ ein additiver Funktor ist.)
(d) Zeigen Sie, dass $\mathcal{K}$ im Allgemeinen keine abelsche Kategorie ist.

Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
05.07.2024

Homologische Algebra
Blatt 13

---

1 | Stehgreiffragen: Injektiv und projektiv

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Ist das Nullobejekt injektiv/projektiv?
(b) Was ist ein Beispiel für einen projektiven, aber nicht freien Modul?
(c) Was ist ein Beispiel für einen projektiven, aber nicht injektiven Modul?
(d) Was ist ein Beispiel für einen injektiven, aber nicht projektiven Modul?
(e) Wie sieht die injektive Auflösung eines injektiven Objekts aus?
(f) Was ist ein Beispiel für eine abelsche Kategorie, die nicht genügend injektive Objekte besitzt?
(g) Wahr oder falsch: Für $0 \to M \to C_0 \to C_{-1} \to \dots$ exakt, ist $M[0] \to C_*$ ein Quasiisomorphismus.
(h) Ist $\mathbf{Ab}$ äquivalent zu $\mathbf{Ab}^{op}$?

2 | Die Kategorie Mod_R hat genügend injektive Objekte

Sei A ein R-Modul. Wir zeigen die Aussage zuerst für $R = \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie für $A \neq 0$, dass $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$.
(b) Sei $I_{\mathbb{Z}}(A) := \prod_{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $I_{\mathbb{Z}}(A)$ injektiv ist.
(c) Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung $e_A \colon A \to I_{\mathbb{Z}}(A)$ injektiv ist.
(d) Zeigen Sie, dass jedes $\mathbb{Z}$-Modul A eine injektive Auflösung besitzt.

Wir zeigen die Aussage nun für allgemeine Ringe R.

(e) Sei $F \colon \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B} \colon G$ ein Paar von additiven adjungierten Funktoren ($F \dashv G$), mit F exakt. Zeigen Sie, dass G injektive Objekte erhält.
(f) Formulieren Sie die duale Aussage.
(g) Zeigen Sie für eine injektive abelsche Gruppe I, dass $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, I)$ ein injektiver R-Modul ist.
(h) Zeigen Sie, dass $\mathbf{Mod}_R$ genügend injektive Objekte besitzt.
(i) Zeigen Sie, dass jeder R-Modul eine injektive Auflösung besitzt.

3 | Nicht so kurze injektive Auflösungen

Sei $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ein injektiver $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Modul ist.
(Gilt die Aussage, R/rR ist injektiv über R/rR für $r \in R$, allgemein für Hauptidealringe?)
(b) Angenommen es gibt $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $p|d$ und $p|\frac{m}{d}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ kein injektiver $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Modul ist.
(Erweiterung: Zeigen Sie für $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, dass projektive und injektive Objekte übereinstimmen. Gilt die Aussage für beliebige Hauptidealringquotienten R/rR für $r \in R \setminus \{0\}$ bzw. $r = 0$?)
(c) Finden Sie eine injektive Auflösung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-Modul.
(Hinweis: Der Titel ist nicht willkürlich gewählt)

Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
12.07.2024

Homologische Algebra
Blatt 14

1 | Tor für Abel

Berechnen Sie $\mathrm{Hom}_i(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m)$ für alle $i, m, n \in \mathbb{N}_0$.

2 | Balanceakt

Seien A und B zwei abelsche Gruppen. Folgern Sie aus der expliziten Definition linskderivierter Funktoren, dass $\mathrm{Hom}_1(A, \underline{B}) := L_1(- \otimes B)(A)$ isomorph ist zu $\mathrm{Hom}_1(\underline{A}, B) := L_1(A \otimes -)(B)$.

Tipp: Sei $0 \to G_1 \to G_0 \to B$ eine freie Auflösung von B. Wenden Sie das Schlangenlemma an auf das Diagramm, das sich ergibt, wenn Sie eine freie Auflösung von A mit G_1 und G_0 tensorieren.

3 | Spalter

Die folgenden Bedingungen an eine Sequenz von Morphismen

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

in einer abelschen Kategorie sind äquivalent:

(i) Die Sequenz ist exakt, und es gibt einen Morphismus $s\colon B \leftarrow C$ mit $gs = \mathrm{id}_C$.
(ii) Die Sequenz ist exakt, und es gibt einen Morphismus $t\colon A \leftarrow B$ mit $tf = \mathrm{id}_A$.
(iii) Es gibt Morphismen $t\colon A \leftarrow B$ und $s\colon B \leftarrow C$, sodass gilt:

$$\begin{aligned} tf &= \mathrm{id}_A & ft + sg &= \mathrm{id}_B & gs &= \mathrm{id}_C \\ ts &= 0 & & & gf &= 0 \end{aligned}$$

(iv) Es gibt einen Isomorphismus i derart, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\begin{pmatrix} \mathrm{id} \\ 0 \end{pmatrix}"'] & A \oplus C \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Hieraus folgt: Jeder additive Funktor erhält spaltende kurze exakte Sequenzen.

4 | Injektivitätserhaltung

Ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien, der rechtsadjungiert ist zu einem exakten Funktor, erhält Injektivität von Objekten.

5 | Vergiss mein nicht

Sei R ein Ring.

(a) Der Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, -)\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ faktorisiert durch $\mathbf{Mod}_R$.
(b) Die Faktorisierung $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, -)\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Mod}_R$ ist rechtsadjungiert zum Vergissfunktor.
(c) Die Faktorisierung $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, -)\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Mod}_R$ erhält Injektivität von Objekten.

Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Sommersemester 2024
19.07.2024

Homologische Algebra
Blatt 15

---

1 | Stehgreiffragen: Modulhandbuch

Sei R ein Ring. Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

(a) Jeder freie R-Modul ist flach.
(b) Jeder freie R-Modul ist projektiv.
(c) Jeder projektive R-Modul ist flach.
(d) Jeder projektive R-Modul ist frei.
(e) Jeder flache R-Modul ist frei.
(f) Jeder flache R-Modul ist projektiv.

Tipp: Es gibt noch mehr Aufgaben auf diesem Zettel.

2 | Abels Ext

Berechnen Sie $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(A, B)$ für möglichst viele $i \in \mathbb{N}_0$ und $A, B \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n \text{ (mit } n > 1), \mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z})$ für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe A isomorph zur Torsionsuntergruppe von A ist.

3 | Erweiterungsbau

Wie viele Erweiterungen von $\mathbb{Z}$ durch $\mathbb{Z}/12$ gibt es (bis auf Äquivalenz)?
Wie viele Erweiterungen von $\mathbb{Z}/12$ durch $\mathbb{Z}$ gibt es (bis auf Äquivalenz)?
Konstruieren Sie alle diese Erweiterungen!

4 | Einsatz

Berechnen Sie alle Homologie- und Kohomologiegruppen $\mathrm{H}_i(\mathbb{Z}/m; \mathbb{Z})$ und $\mathrm{H}^i(\mathbb{Z}/m; \mathbb{Z})$ $(m > 1)$.

5 | Die Welt ist eine Scheibe

Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass jeder projektive R-Modul flach ist.

6 | The Real Thing

Sei G eine nicht-triviale endliche Gruppe, $\mathbb{R}G$ der analog zu $\mathbb{Z}G$ definierte Gruppenring über $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ aufgefasst als trivialer $\mathbb{R}G$-Modul projektiv, aber nicht frei ist.
(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ aufgefasst als trivialer $\mathbb{Z}G$-Modul nicht projektiv ist.