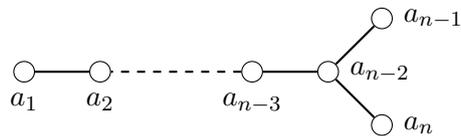


Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 12

Aufgabe 1. Unter einem *Graphen* Γ versteht man ein Gebilde aus *Ecken* und *Kanten*, zum Beispiel das Dynkin-Diagramm D_n mit $n \geq 3$ Ecken:



Zu einem Graphen Γ betrachten wir den rationalen Vektorraum $V = \bigoplus \mathbb{Q}a_i$, dessen Basisvektoren $a_i \in V$ den Ecken $a_i \in \Gamma$ des Graphen entsprechen, und definieren eine symmetrische Bilinearform $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{Q}$ durch

$$\Phi(a_i, a_j) = \begin{cases} -2 & \text{wenn die beiden Ecken } a_i, a_j \text{ übereinstimmen;} \\ 1 & \text{wenn } a_i \neq a_j \text{ durch eine Kante verbunden sind;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie induktiv für die Gram-Matrix $A_n \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$ zu $\Gamma_n = D_n$ die Formel

$$\det(A_n) = (-1)^n \cdot 4.$$

Aufgabe 2. Schreiben Sie den Homomorphismus von Gruppen

$$\text{SU}(2) \longrightarrow \text{SO}(3), \quad S \longmapsto (B \mapsto SBS^{-1}),$$

welcher durch Konjugation auf den spurlosen anti-Hermiteschen Matrizen $B \in \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ gegeben ist, in expliziter Form

$$\begin{pmatrix} x + iy & -u + iv \\ u + iv & x - iy \end{pmatrix} \longmapsto (\lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3},$$

indem sie die Matrixeinträge λ_{ij} durch die Real- und Imaginärteile x, y, u, v ausdrücken.

Aufgabe 3. Sei $a \neq 0$ aus einem K -Vektorraum U , und $b \neq 0$ aus einem K -Vektorraum V . Verifizieren Sie, dass der elementare Tensor

$$a \otimes b \in U \otimes V$$

nicht der Nullvektor ist.

Aufgabe 4. Seien U und V zwei endlich-dimensionale K -Vektorräume. Zeigen Sie, dass die kanonische lineare Abbildung

$$f : U^* \otimes V \longrightarrow \text{Hom}(U, V), \quad \varphi \otimes v \longmapsto (u \mapsto \varphi(u)v)$$

bijektiv ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 4. Juli um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Schriftliche Prüfungen: Die erste Klausur findet am Donnerstag, den 25. Juli von 8:30 bis 10:30 Uhr in den Hörsälen 5B/5F statt. Die Einteilung wird kurzfristig durch Aushang und ILIAS bekanntgegeben. Die Anmeldung zur ersten Klausur geschieht über das Studierendenportal bis zum 18. Juli.

Um zur Prüfung zugelassen zu werden, müssen Studierende der Mathematik 96 Punkte auf den Aufgabenblättern erreicht haben oder in der Vergangenheit bereits einen Prüfungsversuch unternommen haben. Die Modalitäten für die Hörer aus anderen Fächern finden sich auf der Homepage.