Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 11

Aufgabe 1. Geben Sie eine explizite Beschreibung der Elemente von $\mathrm{O}_{1,1}(K)$, analog zur expliziten Beschreibung der Elemente

$$S = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{mit } a^2 + b^2 = 1$$

aus der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}_2(K)$.

Aufgabe 2. Sei $S \in \mathrm{O}(2)$ eine Matrix, die mit allen $R \in \mathrm{SO}(2)$ kommutiert, also $SR = RS$. Folgern Sie, dass $S \in \mathrm{SO}(2)$ gelten muss.

Aufgabe 3. Sei (V, Φ) ein symplektischer Vektorraum von Dimension $n = 2m$. Wir betrachten zu einem Vektor $a \neq 0$ und einem Skalar $\lambda \neq 0$ den Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad x \longmapsto x + \lambda\Phi(x, a)a.$$

Verifizieren Sie $f \in \mathrm{Aut}(V, \Phi)$. Zeigen Sie weiterhin $\det(f) = 1$, indem Sie den Vektor a zu einer Basis ergänzen und die resultierende Matrix S aufstellen.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $G \subset \mathrm{GL}(V)$ eine endliche Untergruppe. Zeigen Sie, dass es ein Skalarprodukt

$$\Phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt so, dass $G \subset \mathrm{Aut}(V, \Phi)$ gilt. Tipp: Wählen Sie zunächst irgendein Skalarprodukt $\Psi(x, y)$ und betrachten Sie die Formen $\Psi_g(x, y) = \Psi(gx, gy)$ mit $g \in G$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 27. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.