Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 10

Aufgabe 1. Wir betrachten auf dem Anschauungsraum $V = \mathbb{R}^3$ die symmetrische Bilinearform

$$\Phi(x, y) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Verifizieren Sie, dass Φ nicht-entartet ist.

(ii) Berechnen Sie eine Basis für das orthogonale Komplement zu $e_1 = (1, 0, 0)$.

(iii) Bestimmen Sie die Signatur (r, s) mithilfe von Hauptminoren.

Aufgabe 2. Seien $\Phi, \Psi : V \times V \to K$ zwei nicht-entartete Bilinearformen. Sei $a_1, \ldots, a_n \in V$ eine Basis und $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die resultierenden Gram-Matrizen für Φ beziehungsweise Ψ. Verifizieren Sie, dass die Polynome

$$\chi_{A^{-1}B}(T) \quad \text{und} \quad \mu_{A^{-1}B}(T)$$

nicht von der Wahl der Basis abhängen.

Aufgabe 3. Sei U ein m-dimensionaler K-Vektorraum. Wir betrachten auf $V = U \oplus U^*$ die Abbildung

$$\Phi : V \times V \longrightarrow K, \quad ((a, \varphi), (b, \psi)) \longmapsto \varphi(b) - \psi(a).$$

Verifizeren Sie, dass Φ alternierend und nicht-entartet ist. Finden Sie eine symplektische Basis von V, ausgehend von einer Basis $a_1, \ldots, a_m \in U$.

Aufgabe 4. Sei $\Phi : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform auf einem n-dimensionalen Vektorraum V über einem Körper von Charakteristik $p \neq 2$, und $a \in V$ ein Vektor mit $\Phi(a, a) \neq 0$. Wir betrachten den Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad x \longmapsto x - 2\frac{\Phi(x, a)}{\Phi(a, a)}a.$$

Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_f(T) \in K[T]$. Folgern Sie daraus, dass f diagonalisierbar ist, und geben Sie die Eigenraumzerlegung an.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 20. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.