Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei K ein Körper von Charakteristik $p \neq 2$, und V ein beliebiger Vektorraum. Zeigen Sie, dass jede Bilinearform

$$\Phi : V \times V \longrightarrow K$$

sich in eindeutiger Weise als Summe $\Phi = \Phi' + \Phi''$ schreiben lässt, wobei Φ' symmetrisch und Φ'' antisymmetrisch ist.

Aufgabe 2. Sei $V \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ der 4-dimensionale reelle Untervektorraum aller komplexen Matrizen der Form

$$B = \begin{pmatrix} x & z \\ \bar{z} & y \end{pmatrix}$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$. Rechnen Sie nach, dass

$$\Phi(B, C) = \det(B + C) - \det(B) - \det(C)$$

eine Bilinearform auf V ist. Wählen Sie eine Basis $A_1, \ldots, A_4 \in V$ und stellen Sie die Gram-Matrix auf.

Aufgabe 3. Sei $\Phi : V \times V \to K$ eine Bilinearform, die symmetrisch oder antisymmetrisch ist, und $U = \mathrm{Rad}(\Phi)$ ihr Radikal. Zeigen Sie, dass

$$\Psi(a + U, b + U) = \Phi(a, b)$$

wohldefiniert ist, und auf dem Quotientenvektorraum V/U eine Bilinearform definiert, die symmetrisch oder antisymmetrisch und nicht-entartetet ist.

Aufgabe 4. Wir betrachten auf dem Anschauungsraum $V = \mathbb{R}^3$ die symmetrische Bilinearform

$$\Phi(x, y) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} +\alpha_1 & & \\ & +\alpha_2 & \\ & & -\alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

zu gegebenen reellen Zahlen $\alpha_i > 0$. Skizzieren Sie die Teilmenge

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi(x, x) = 0\}.$$

Abgabe: Bis Donnerstag, den 13. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.