Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 8

Aufgabe 1. Wie ändert sich das charakteristische Polynom $\chi_A(T) \in K[T]$, wenn man $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$ durch eine kongruente Matrix

$$B = {}^tSAS, \quad S \in \mathrm{GL}_2(K)$$

ersetzt?

Aufgabe 2. Sei $V \subset K[T]$ der Vektorraum aller Polynome $P(T)$ vom Grad $\deg(P) \leqslant 4$, und $\varphi \in V^*$ die durch

$$\varphi(P) = P'(-2).$$

gegebene Linearform, wobei $P'(T)$ die formale Ableitung ist. Stellen Sie φ als Linearkombination der dualen Basis Q_i^* zur Standardbasis $Q_i = T^i$, $0 \leqslant i \leqslant 4$ dar.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

im Standardvektorraum $V = \mathbb{Q}^3$. Bestimmen Sie die duale Basis a_1^*, a_2^*, a_3^* im Dualraum

$$V^* = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}) = \mathrm{Mat}_{1\times 3}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^3.$$

Tipp: Berechnen Sie ${}^tA^{-1}$ für eine relevante Matrix $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$.

Aufgabe 4. Wir identifizieren den Standardvektorraum $V = \mathbb{Q}^n$ mit seinem Dualraum $V^* = \mathrm{Mat}_{1\times n}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^n$ und betrachten den Endomorphismus

$$h : \mathrm{End}(\mathbb{Q}^n) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{Q}^n), \quad f \longmapsto f^*.$$

Benutzen Sie das Minimalpolynom $\mu_h(T) \in \mathbb{Q}[T]$, um zu zeigen, dass h diagonalisierbar ist, und die Jordan-Normalform zu bestimmen.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 6. Juni um 10:25 Uhr im Zettelkasten.