Mathematisches Institut SS 2024
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 7

Aufgabe 1. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_2(K)$ zwei nilpotente Matrizen, deren Produkt AB ebenfalls nilpotent ist. Folgern Sie, dass $AB = 0$ gelten muss.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring, der Unterring eines Körpers ist, zum Beispiel der Polynomring $R = K[T]$. Sei $\mathfrak{a} \subset R$ ein Hauptideal und $f, g \in \mathfrak{a}$ zwei Erzeuger. Zeigen Sie, dass $f = ug$ für ein $u \in R^\times$.

Aufgabe 3. Sei $f : V \to V$ eine Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums, $U \subset V$ ein invarianter Untervektorraum, und

$$\bar{f} : V/U \to V/U$$

der induzierte Endomorphismus auf dem Quotientenvektorraum.

(i) Verifizieren Sie, dass die Minimalpolynome $\mu_{f|U}(T)$ und $\mu_{\bar{f}}(T)$ Teiler von $\mu_f(T)$ sind.

(ii) Folgern Sie, dass $f|U$ und $\bar{f}$ diagonalisierbar sind, falls der Endomorphismus f diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Beweisen Sie, dass der Grad des Minimalpolynoms $\mu_A(T)$ mit der Vektorraumdimension des Bildes der linearen Abbildung

$$K[T] \longrightarrow \mathrm{Mat}_n(K), \quad P(T) \longmapsto P(A)$$

übereinstimmt.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 29. Mai um 10:25 Uhr im Zettelkasten.