Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 6

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Jordan-Normalform zur Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_3).$$

Tipp: Berechnen Sie für gewisse $(B - \lambda E)^i$ mit dem Gauß-Algorithmus den Rang.

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ eine reelle Matrix, die über $K = \mathbb{R}$ nicht trigonalisierbar ist, und $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ das Spektrum der komplexen Eigenwerte.

(i) Zeigen Sie, dass $\sigma(A) = \{x, z, \bar{z}\}$ für eine relle Zahl x und konjugiert-komplexe Zahlen $z \neq \overline{z}$.

(ii) Folgern Sie, dass A über $L = \mathbb{C}$ diagonalisierbar sein muss.

Aufgabe 3. Sei $p > 0$ eine Primzahl. Geben Sie für $n = 4$ eine Formel für die Anzahl $m \geq 0$ der Ähnlichkeitsklassen von trigonalisierbaren $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$ an.

Aufgabe 4. Sei $B = (\lambda_{ij})$ eine nilpotente $n \times n$-Matrix mit Einträgen $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}$. Für eine Primzahl $p > 0$ bezeichne $B_p = ([\lambda_{ij}])$ die Matrix der Kongruenzklassen modulo p. Beweisen Sie, dass für fast alle p die Jordan-Normalform von $B_p \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$ mit der Jordan–Normalform von $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$ übereinstimmt.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 23. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.