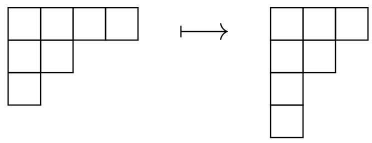
Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2024

# Übungen zu Lineare Algebra II

## Blatt 5

**Aufgabe 1.** Spiegelt man ein Young-Diagramm $Y$ entlang der Diagonale, erhält man das *transponierte Young-Diagramm* $Y^*$, zum Beispiel:



Geben Sie für $n = 7$ die entsprechende Abbildung $A \mapsto A^*$ für die fünfzehn Jordan-Normalformen von nilpotenten $n \times n$-Matrizen an.

**Aufgabe 2.** Sei $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$ eine nilpotente Matrix, und

$$U = \{B \in \mathrm{Mat}_2(K) \mid AB = BA\}$$

ihr *Kommutator*. Verifizieren Sie, dass $U \subset \mathrm{Mat}_2(K)$ ein Untervektorraum ist, und bestimmen sie dessen Dimension in Abhängigkeit zur Jordan-Normalform von $A$.

**Aufgabe 3.** Sei $Z \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ der Kegel der nilpotenten Matrizen. Zeigen Sie, dass dies eine *abgeschlossene Menge* ist, und das Komplement $U$ eine *offene Menge* ist. Mit anderen Worten: Zu jedem $(\alpha_{ij}) \in U$ gibt es ein reelles $\epsilon > 0$ so, dass $(\beta_{ij}) \in U$ sofern die Matrixeinträge $|\alpha_{ij} - \beta_{ij}| < \epsilon$ erfüllen.

**Aufgabe 4.** Sei $f : V \to V$ trigonalisierbar. Beweisen Sie, dass $f$ genau dann diagonalisierbar ist, wenn es zu jedem invarianten Unterraum $U \subset V$ ein invariantes Komplement gibt.

**Abgabe:** Bis Donnerstag, den 16. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.