Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, und $\mathscr{H}_X \subset \mathscr{C}_X^\infty \subset \mathscr{C}_X$ die Garben der holomorphen, differenzierbaren beziehungsweise stetigen $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen. Verifizieren Sie, dass $\mathrm{id}_X : X \to X$ zusammen mit den obige Inklusionen Morphismen

$$(X, \mathscr{C}_X) \longrightarrow (X, \mathscr{C}_X^\infty) \longrightarrow (X, \mathscr{H}_X)$$

von geringten Räumen liefern.

Aufgabe 2. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, und $\mathscr{F}$ eine Garbe auf X. Für die offenen Mengen $V \subset Y$ definieren wir

$$\Gamma(V, f_*(\mathscr{F})) = \Gamma(f^{-1}(V), \mathscr{F}).$$

Machen Sie $f_*(\mathscr{F})$ zu einer Garbe auf Y, indem Sie in kanonischer Weise Einschränkungsabbildungen $\mathrm{res}_{V'}^V$ zu den Inklusionen $V' \subset V$ festlegen, und dann die Prägarbeneigenschaften sowie das Garbenaxiom verifizieren.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring, L ein invertierbarer R-Modul, und

$$X = D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_r)$$

eine offene Überdeckung von $X = \mathrm{Spec}(R)$ so, dass es Basiselemente $a_i \in L_{f_i}$ gibt. Durch die Gleichung $a_i = \lambda_{ij} a_j$ werden damit Elemente $\lambda_{ij} \in R_{f_i f_j}^\times$ definiert. Zeigen Sie, dass dann

$$\lambda_{jk} \cdot \lambda_{ik}^{-1} \cdot \lambda_{ij} = 1$$

in der Lokalisierung $R_{f_i f_j f_k}$ gelten muss.

Aufgabe 4. Sei $(X, \mathscr{O}_X)$ ein geringter Raum, und $s \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ ein globaler Schnitt. Angenommen, es gibt eine offenen Überdeckung $X = \bigcup U_\lambda$ so, dass die Einschränkungen $s_\lambda = s|U_\lambda$ invertierbar in $\Gamma(U_\lambda, \mathscr{O}_X)$ sind. Zeigen Sie, dass dann auch $s \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ invertierbar ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 15. Juli um 23:59 Uhr über ILIAS.