Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum. Verifizieren Sie, dass die lokal-konstanten Funktionen

$$f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$$

genau die Abbildungen sind, welche nach oben und nach unten halbstetig sind.

Aufgabe 2. Sei R ein integrer noetherscher Ring, $F = \operatorname{Frac}(R)$ der Körper der Brüche, und M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeigen Sie, dass für gewisse Ringelemente $f \neq 0$ die Lokalisierung M_f ein freier Modul über R_f wird.

Aufgabe 3. Sei M ein lokal freier R-Modul vom endlichen Rang. Zeigen Sie, dass für jeden surjektiven Homomorphismus $\varphi : N_1 \to N_2$ die induzierte lineare Abbildung

$$\varphi_* : \operatorname{Hom}_R(M, N_1) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N_2), \quad \psi \longmapsto \psi \circ \varphi$$

ebenfalls surjektiv ist.

Aufgabe 4. Sein R ein Ring, und M ein lokal freier R-Modul vom endlichen Rang. Beweisen Sie, dass die kanonische Abbildung

$$\varphi : M^\vee \otimes M \longrightarrow \operatorname{End}_R(M), \quad \psi \otimes a \longmapsto (x \mapsto \psi(x) \cdot a)$$

bijektiv ist, indem Sie bezüglich einer geeigneten offenen Überdeckung

$$\operatorname{Spec}(R) = D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_r)$$

lokalisieren. Folgern Sie, dass in der Picard-Gruppe $\operatorname{Pic}(R)$ das Inverse durch $-[L] = [L^\vee]$ gegeben ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 8. Juli um 23:59 Uhr über ILIAS.