Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei k ein Körper, und $f, g \in k[x,y]$ zwei Polynome mit $\mathrm{ggT}(f,g) = 1$. Zeigen Sie mit Krulls Hauptidealsatz, dass die Verschwindungsmenge

$$V(f,g) = V(f) \cap V(g)$$

in $X = \mathrm{Spec}(k[x,y])$ aus endlich vielen abgeschlossenen Punkten besteht.

Aufgabe 2. Sei R ein lokaler noetherscher Ring, mit Restekörper $\kappa = R/\mathfrak{m}_R$ und Einbettungsdimension

$$n = \mathrm{edim}(R) = \dim_\kappa(\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2).$$

Sei $f \in \mathfrak{m}_R$ ein Element des maximalen Ideals, und $\bar{R} = R/fR$ der Restklassenring. Verifizieren Sie, dass

$$\mathrm{edim}(\bar{R}) = \begin{cases} n-1 & \text{wenn } f \notin \mathfrak{m}_R^2; \\ n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3. Seien $m, n \geq 1$ zwei ganze Zahlen. Wir betrachten den Ring

$$R = k[x,y]/(x^m - y^n)$$

über einem Körper k. Verifizieren Sie $\dim(R) = 1$, und geben Sie eine explizite Inklusion $k[s] \subset R$ an so, dass R als Modul über $k[s]$ frei vom endlichen Rang ist.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper, R eine endlich erzeugte k-Algebra, und $f \in R$ ein Element, das in keinem der minimalen Primideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r \subset R$ enthalten ist. Beweisen Sie

$$\dim(R_f) = \dim(R).$$

Reduzieren Sie das Problem zunächst auf den Fall, dass R integer ist, indem Sie zu den Restklassenringen $R/\mathfrak{q}_i$ übergehen.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 1. Juli um 23:59 Uhr über ILIAS.