Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei R ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeigen Sie, dass es eine lange exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow R^{\oplus n_0} \longleftarrow R^{\oplus n_1} \longleftarrow R^{\oplus n_2} \longleftarrow \ldots$$

gibt, für gewisse Exponenten $n_i \geq 0$.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring. Gegeben sei ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5
\end{array}$$

von R-Moduln, dessen Zeilen exakt sind. Wir bezeichnen die vertikalen Abbildungen mit $\varphi_i : M_i \to N_i$. Verifizieren Sie mit Diagrammjagd die folgende Form des Fünfer-Lemmas:

(i) Ist φ_1 surjektiv und sind φ_2, φ_4 injektiv, so ist auch φ_3 injektiv.

(ii) Ist φ_5 injektiv und sind φ_2, φ_4 surjektiv, so ist auch φ_3 surjektiv.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul, und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal, dessen Elemente nilpotent sind. Angeneommen, es gilt $M/\mathfrak{a}M = 0$. Folgern Sie mit dem Nakayama-Lemma, dass $M = 0$.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring. Angenommen, es gibt eine offene Überdeckung

$$\operatorname{Spec}(R) = D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_r)$$

so, dass die Lokalisierungen R_{f_i} noethersche Ringe sind. Beweisen Sie, dass R noethersch ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 17. Juni um 23:59 Uhr über ILIAS.