Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 5

Aufgabe 1. Sei R ein lokaler Ring und $X = \operatorname{Spec}(R)$ sein Spektrum. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) X ist nicht-leer;

(ii) X ist irreduzibel;

(iii) X ist zusammenhängend;

(iv) X ist quasikompakt;

(v) X ist noethersch.

Aufgabe 2. Sei X ein noetherscher Raum, der zusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass es eine endliche Folge von irreduziblen Komponenten $X_1, \ldots, X_n$ gibt, in der Wiederholungen erlaubt sind, wobei $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ sowie $X_i \cap X_{i+1} \neq \varnothing$ für $0 \leq i \leq n-1$ gilt.

Aufgabe 3. Sei X ein beliebiger topologischer Raum,

$$X^{\text{sob}} = \{x_Z \mid Z \subset X \text{ abgeschlossen und irreduzibel}\}$$

seine Sobrifizierung, und $f : X \to X^{\text{sob}}$ die kanonische Abbildung. Verifizieren Sie, dass das Bild $f(X)$ kolmogoroffsch ist, und dass die Zuordnung $X \mapsto X^{\text{sob}}$ funktoriell ist.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring. Beweisen Sie, dass ein Ideal $\mathfrak{p} \subset R$, welches maximal unter allen nicht-endlich erzeugten Idealen $\mathfrak{a} \subset R$ ist, prim sein muss. Nehmen Sie dazu an, dass $fg \in \mathfrak{p}$ aber $f, g \notin \mathfrak{p}$, und betrachten Sie die Ideale

$$\mathfrak{p} + Rf \quad \text{und} \quad \mathfrak{p} + Rg \quad \text{und} \quad \mathfrak{c} = \{a \in R \mid af \in \mathfrak{p}\}$$

sowie $(f) \cdot \mathfrak{c} = (f) \cap \mathfrak{p}$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 27. Mai um 23:59 Uhr über ILIAS.