Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei R ein Ring, und R_λ, $\lambda \in L$ die Familie der noetherschen Unterringe. Zeigen Sie mit dem Hilbertschen Basissatz, dass $R = \bigcup_{\lambda\in L} R_\lambda$.

Aufgabe 2. Sei k ein Körper, A eine endlich erzeugte k-Algebra, $X = \operatorname{Spec}(A)$ das Spektrum. Sei $f \in A$ ein Ringelement mit $f(x) = 0$ im Restekörper $\kappa(x)$ für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in X$. Folgern Sie mit dem Hilbertschen Nullstellensatz, dass f nilpotent ist.

Aufgabe 3. Sei k ein Körper, $\varphi : R \to A$ ein Homomorphismus zwischen endlich erzeugten k-Algebren, und

$$f : X = \operatorname{Spec}(A) \longrightarrow \operatorname{Spec}(R) = Y$$

die induzierte stetige Abbildung. Beweisen Sie mit dem Nullstellensatz, dass für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in X$ das Bild $f(x) \in Y$ ebenfalls abgeschlossen ist.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper, $S \in \operatorname{Mat}_n(k)$ eine Matrix, $A = k[S]$ die von S erzeugte Unteralgebra, und $X = \operatorname{Spec}(A)$. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte $\lambda \in k$ der Matrix den Punkten $x \in X$ mit Restekörper $\kappa(x) = k$ entsprechen.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 13. Mai um 23:59 Uhr über ILIAS.