Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS19

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 5

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Jordan-Normalform zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_3).$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Anzahl $c_p \geq 1$ der Änlichkeitsklassen von trigonalisierbaren Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_p)$ für die Primzahlen $p = 2$ sowie $p = 3$. Benutzen Sie dafür die Jordan-Normalform.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass jede komplexe Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ ähnlich zur transponierten Matrix ${}^tA$ ist. Benutzen Sie dafür die Jordan-Normalform.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_3(K)$ eine Matrix, die nicht trigonalisierbar ist.

(i) Angenommen, dass Spektrum $\sigma(A)$ ist nicht-leer. Beweisen Sie, dass A ähnlich zu einer Matrix der Form

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

ist, mit eindeutig bestimmten Einträgen $\alpha, \beta, \gamma \in K$.

(ii) Folgern Sie, dass A in jedem Fall ähnlich zu einer Begleitmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & \tau \end{pmatrix}$$

ist, wiederum mit eindeutig bestimmten Einträgen $\lambda, \mu, \tau \in K$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 9. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.