Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 7

Aufgabe 1. Seien X und Y topologische Räume, $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathscr{F}$ eine abelsche Garbe auf X. Wir definieren eine Prägarbe $f_*(\mathscr{F})$ auf Y durch

$$\Gamma(V, f_*(\mathscr{F})) = \Gamma(f^{-1}(V), \mathscr{F})$$

sowie den Restriktionsabbildungen

$$\mathrm{res}_U^V = \mathrm{res}_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(V)}.$$

Verifizieren Sie, dass es sich bei diese Prägarbe um eine Garbe handelt (die sogenannte *direkte Bildgarbe*), und berechnen Sie die Halme $f_*(\mathscr{F})_y$.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum, $V \subset X$ eine offene Teilmenge, und $\mathscr{F}$ eine abelsche Garbe auf V. Es bezeichen $i : V \to X$ die Inklusionsabbildung. Wir definieren eine abelsche Prägarbe $i_!(\mathscr{F})$ auf X durch

$$\Gamma(U, i_!(\mathscr{F})) = \begin{cases} \Gamma(U, \mathscr{F}) & \text{wenn } U \subset V; \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

sowie den offensichtlichen Restriktionsabbildungen. Verifizieren Sie, dass diese Prägarbe eine Garbe ist (die sogenannte *Fortsetzung durch Null*), und berechnen Sie die Halme $i_!(\mathscr{F})_x$.

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum und G eine abelsche Gruppe. Wir definieren eine abelsche Prägarbe durch

$$\Gamma(U, \mathscr{F}) = \begin{cases} G & \text{wenn } U \text{ nichtleer;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unter welchen Voraussetzungen an X und G handelt es sich um eine Garbe?

Aufgabe 4. (i) Sei R ein Ring, N ein R-Modul, und $M, M' \subset N$ zwei Untermoduln. Zeigen Sie, dass die Inklusion $M \subset M'$ als Untermoduln von N genau dann gilt, wenn

$$M_{\mathfrak{p}} \subset M'_{\mathfrak{p}} \quad \text{als Untermoduln von } N_{\mathfrak{p}}$$

für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset R$ der Fall ist.

(ii) Verallgemeinern Sie diese Aussage auf topologische Räume und abelsche Garben.

Abgabe: Bis Freitag, den 9. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.