Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 13/14

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 11

Aufgabe 1. Welche Fundamentalgruppen haben die Buchstaben

$$A, B, C, \ldots, Z,$$

aufgefasst als Teilräume im $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 2. Seien X, Y zwei kompakte, zusammenhängende, nichtleere 2-Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Räume X und Y sind homöomorph.

(ii) Die Räume X und Y sind homotopieäquivalent.

(iii) Die Gruppen $\pi_1(X, a)$ und $\pi_1(Y, b)$ sind isomorph.

(iv) Die abelschen Gruppen $H_1(X)$ und $H_1(Y)$ sind isomorph.

(v) Die beiden $\mathbb{F}_p$-Vektorräume $H_1(X, \mathbb{F}_p)$ und $H_1(Y, \mathbb{F}_p)$ haben die gleiche Dimension, für $p = 2$ und $p = 3$.

Aufgabe 3. Konstruieren Sie mit dem Satz von Seifert–van Kampen einen topologischen Raum X, dessen Fundamentalgruppe $\pi_1(X, a)$ zyklisch von Ordnung drei ist.

Aufgabe 4. Sei X eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit von Dimension $n \geq 3$, und $U = X \smallsetminus \{b\}$ das Komplement eines Punktes $b \in X$. Sei $a \in U$ ein Fußpunkt. Beweisen Sie mit dem Satz von Seifert–van Kampen, dass die kanonische Abbildung

$$\pi_1(U, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$$

bijektiv ist.

Abgabe: Bis Montag, den 20.1. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.