Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 13/14

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 9

Aufgabe 1. Verifizieren Sie in der Kategorie (Top) der topologischen Räume die folgenden Aussagen mithilfe von Fundamentalgruppen:

(i) Die Exponentialabbildung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$, $z \mapsto e^{2\pi i z}$ hat keinen Schnitt.

(ii) Die Inklusionsabbildung $\iota : S^1 \to D^2$, $x \mapsto x$ erlaubt keinen Retraktion.

Aufgabe 2. Hier bezeichne $\pi_0(X)$ die Menge der Wegkomponenten eines topologischen Raumes X. Zeigen Sie, dass die Zuordnung

$$X \longmapsto \pi_0(X)$$

in kanonischer Weise zu einem Funktor (Top) $\to$ (Set) gemacht werden kann.

Aufgabe 3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sei X ein Hausdorff-Raum und A eine dichte Teilmenge. Die Inklusionsabbildung $A \to X$ ist eine Epimorphismus in der Kategorie der Hausdorff-Räume.

(ii) Sei R ein integrer Ring und K der Körper seiner Brüche. Die Inklusionsabbildung $R \to K$ ist ein Epimorphismus in der Kategorie (Ring) der Ringe.

(iii) In der Kategorie (Grp) der Gruppen sind die Epimorphismen genau die surjektiven Gruppenhomomorphismen $G \to H$.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Gegeben seien Objekte X, Y, A und Morphismen

$$X \xleftarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} Y \tag{$*$}$$

in $\mathcal{C}$. Unter einer *amalgamierten Summe* versteht man ein Objekt S, zusammen mit Morphismen $i : X \to S$ und $j : Y \to S$ so, dass $i \circ \varphi = j \circ \psi$ und folgende *universelle Eigenschaft* gilt: Zu jedem Objekt T und jedem kommutativen Diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & Y \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j'} \\ X & \xrightarrow[i']{} & T \end{array}$$

gibt es genau einen Morphismus $f : S \to T$ so, dass $f \circ i = i'$ und $f \circ j = j'$. Man schreibt dafür auch $S = X \amalg_A Y$.

Konstruieren Sie in den Kategorien

$$\mathcal{C} = (\mathsf{Set}), \quad \mathcal{C} = (\mathsf{Top}), \quad \mathcal{C} = (\mathsf{Ab}), \quad \mathcal{C} = (\mathsf{Ring})$$

amalagamierte Summen zu beliebigen vorgegebenen $(*)$.

Abgabe: Bis Montag, den 6.1 um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!