Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 13/14

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum und $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ eine Überdeckung. Wir nehmen an, dass es sich dabei entweder um eine beliebige offene Überdeckung handelt, oder um eine endliche abgeschlossene Überdeckung. Seien $f_i : X_i \to T$, $i \in I$ stetige Abbildungen, die auf den Überlappungen übereinstimmen, also

$$f_i|_{X_i \cap X_j} = f_j|_{X_i \cap X_j} \quad \forall i, j \in I.$$

Verifizieren Sie, dass es genau eine stetige Abbildung $f : X \to T$ so, dass $f|_{X_i} = f_i$ für alle $i \in I$. (Bei der Definition von Homotopien mittels Fallunterscheidungen wird diese Tatsache für endliche abgeschlossene Überdeckungen immer wieder verwendet.)

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum und $w : I \to X$ ein Weg von $a \in X$ nach $b \in X$. Zeigen Sie explizit, dass die Zusammensetzung $w^{-1} \star w$ homotop zur konstanten Schleife $t \mapsto a$ ist.

Aufgabe 3. Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Weisen Sie nach, dass $\pi_1(X, a) = \{e\}$ genau dann gilt, wenn sich jede stetige Abbildung $f : S^1 \to X$ zu einer stetigen Abbildung $F : B^2 \to X$ fortsetzen läßt.

Aufgabe 4. Sei G eine topologische Gruppe und $e \in G$ das neutrale Element. Benutzen Sie die Gruppenstruktur $G \times G \to G$, um zu beweisen, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, e)$ kommutativ sein muss.

Abgabe: Bis Montag, den 9.12. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.