Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 13/14

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 4

Aufgabe 1. Die Einheitengruppe $G = \mathbb{R}^\times$ wirkt auf der punktierten reellen Ebene $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ durch

$$G \times X \longrightarrow X, \quad (\lambda, (x, y)) \longmapsto (\lambda x, \lambda^{-1} y).$$

Skizzieren Sie die Bahnen $G(x, y) \subset X$ und verifizieren Sie, dass der Bahnenraum $Y = X/G$ nicht hausdorffsch ist.

Aufgabe 2. Seien X, Y zwei Hausdorff-Räume, und $A \subset X$, $B \subset Y$ zwei abgeschlossene Unterräume, und $\varphi : A \to B$ ein Homöomorphismus. Verifizieren Sie, dass die zugehörige Verklebung $Z = X \cup_\varphi Y$ ebenfalls hausdorffsch ist. Bleibt diese Aussage für beliebige Unterräume $A \subset X$, $B \subset Y$ richtig?

Aufgabe 3. Die Einheitengruppe $\mathbb{C}^\times$ wirkt durch Skalarmultiplikation auf dem komplexen Standardvektorraum $\mathbb{C}^{n+1}$, wobei der Ursprung $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ ein Fixpunkt ist. Zeigen Sie, dass der Bahnenraum

$$\mathbb{CP}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$$

eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$ ist.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum. Beweisen Sie, dass es eine surjektive stetige Abbildung $q : X \to Y$ in einen Hausdorff-Raum Y gibt, die folgende universelle Eigenschaft hat: Zu jeder stetigen Abbildung $f : X \to H$ in einen Hausdorff-Raum H gibt es genau eine stetige Abbildung $g : Y \to H$ mit $f = g \circ q$. Mit anderen Worten, das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[rr, dotted, "g"'] & & H \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Abgabe: Bis Montag, den 18.11. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.