Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 13/14

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 3

Aufgabe 1. Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen. Welche der folgenden Teilräume von $\mathbb{R}$ sind homöomorph, welche nicht?

$$U =]a, b[\quad \text{und} \quad A = [a, b] \quad \text{und} \quad L = [a, b[\quad \text{und} \quad R =]a, b]$$

Aufgabe 2. Verifizieren Sie:

(i) Ein endlicher Raum, der hausdorffsch ist, muss diskret sein.

(ii) Ein diskreter Raum, der quasikompakt ist, muss endlich sein.

(iii) Ein Raum, der Vereinigung von endlich vielen quasikompakten Teilmenge ist, muss quasikompakt sein.

(iv) Produkte von Hausdorff-Räumen sind hausdorffsch.

Aufgabe 3. Sei X ein Hausdorff-Raum und $A, B \subset X$ zwei kompakte Teilmengen mit $A \cap B = \emptyset$.

(i) Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen $A \subset U$ und $B \subset V$ mit $U \cap V = \emptyset$ gibt.

(ii) Bleibt diese Aussage richtig, falls X nicht mehr hausdorffsch ist?

Aufgabe 4. Sei X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum, der nicht kompakt ist, ∞ ein formales Symbol, und $\bar{X} = X \cup \{\infty\}$ die disjunkte Vereinigung. Wir definieren auf der Menge $\bar{X}$ eine Topologie, indem wir deklarieren:

$$U \subset \bar{X} \text{ offen} \quad \Longleftrightarrow \quad U = \begin{cases} V \text{ mit } V \subset X \text{ offen;} \\ (X \smallsetminus K) \cup \{\infty\} \text{ mit } K \subset X \text{ kompakt.} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass dies tatsächlich eine Toplogie ist, $X \subset \bar{X}$ eine offenen dichte Teilmenge ist, und dass $\bar{X}$ kompakt ist. Man bezeichnet $\bar{X}$ auch als die *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* oder *Alexandroff-Kompaktifizierung* von X. Zeigen Sie weiterhin, dass die Alexandroff-Kompaktifizierung des Standardvektorraumes $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ homöomorph zur Standardsphäre S^n ist.

Abgabe: Bis Montag, den 11.11. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Prüfungen: Es werden *mündliche* Prüfungen im Anschluss an die Vorlesungszeit und zum Ende des Semesters stattfinden. Voraussichtliche Prüfungstermine: Dienstag, den 11.2. und 1.4.2014.