Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 13/14

Übungen zur Einführung in die Topologie

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei X ein metrischer Raum. Verifizieren Sie, dass die Teilmenge

$$U_{a,\epsilon} = \{x \in X \mid d(x,a) < \epsilon\}$$

mit $a \in X$ und $\epsilon > 0$ tatsächlich die Basis einer Topologie bilden. Diese wird die *metrische Topologie* genannt.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum, und Y die Menge aller nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen $A \subset X$. Sind $U_0, \ldots, U_n \subset X$ offen, so definieren wir die Teilmenge

$$V_{U_0,\ldots,U_n} = \left\{ A \in Y \mid A \cap U_i \neq \emptyset \quad \forall 0 \leqslant i \leqslant n, \text{ und } A \subset \bigcup_{i=0}^{n} U_i \right\}$$

von Y. Zeigen Sie, dass diese Teilmengen die Basis einer Topologie auf Y bilden. Diese wird als die *Vietoris-Topologie* bezeichnet.

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum. Eine reelle Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *nach oben halbstetig*, wenn es zu jedem $a \in X$ und jedem $\epsilon > 0$ eine offene Umgebung $a \in U \subset X$ gibt so, dass $f(x) < f(a) + \epsilon$ für alle $x \in U$. Geben Sie eine Topologie $\mathcal{T}$ auf der Menge $\mathbb{R}$ an, für welche die nach oben halbstetigen Funktionen genau die stetigen Abbildungen sind.

Aufgabe 4. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Sein *Spektrum* $\operatorname{Spec}(R)$ ist die Menge aller Primideale $\mathfrak{p} \subset R$. Ist $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal, so bezeichnet man mit $V(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Spec}(R)$ die Menge aller Primideale, welche $\mathfrak{a}$ enthalten.

(i) Zeigen Sie, daß die $V(\mathfrak{a})$ die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\operatorname{Spec}(R)$ bilden. Man bezeichnet diese Topologie als die *Zariski-Topologie*.

(ii) Sei $\varphi : R' \to R$ ein Ringhomomorphismus. Weisen Sie nach, daß die Abbildung

$$f : \operatorname{Spec}(R) \longrightarrow \operatorname{Spec}(R'), \quad \mathfrak{p} \longmapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$$

wohldefiniert und stetig ist.

Abgabe: Bis Montag, den 28.10. um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Prüfungen: Die *Zulassungsvoraussetzung* zur Teilnahme an der Prüfung ist das Erreichen von 40% auf den 13 Übungsblättern, also $84 = \lceil 13 \times 16 \times 0,4 \rceil$ Punkte.