Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 11

# Übungen zur Kommutativen Algebra & Geometrie

## Blatt 5

**Aufgabe 1.** Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung von topologischen Räumen, und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf $X$. Wir definieren eine Prägarbe $f_*(\mathcal{F})$ auf $Y$ durch

$$\Gamma(V, f_*(\mathcal{F})) = \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{F}),$$

mit Restriktionsabbildungen

$$\mathrm{res}_U^V = \mathrm{res}_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(V)}.$$

Verifizieren Sie, dass diese Prägarbe eine Garbe ist („direkte Bildgarbe").

**Aufgabe 2.** Sei $R$ ein Ring und $S \subset R$ ein multiplikatives System. Verifizieren Sie, dass die Relation

$$(a, s) \sim (a', s') \quad \Longleftrightarrow \quad \exists t \in S \text{ mit } t(as' - a's) = 0$$

auf $R \times S$ eine Äquivalenzrelation ist, und dass die beiden Verknüpfungen

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'} \quad \text{und} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}$$

auf $S^{-1}R$ wohldefiniert sind.

**Aufgabe 3.** Wir betrachten den Ring

$$R = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}.$$

Skizzieren Sie den topologischen Raum $X = \mathrm{Spec}(R)$ und berechnen Sie für alle 24 Elemente $f \in R$ die Lokalisierung $R_f$.

**Aufgabe 4.** Sei $R$ ein Hauptidealring, $R \subset K$ der Körper seiner Brüche, und $R \subset A \subset K$ ein Zwischenring. Zeigen Sie, dass $A = S^{-1}R$ für ein geeignetes multiplikatives System $S \subset R$. Verallgemeinert sich diese Tatsache auf beliebige integre Ringe $R$?

**Abgabe:** Bis Montag, den 23.05.2011 um 8:30 Uhr im Zettelkasten.