Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 11

Übungen zur Kommutativen Algebra & Geometrie

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei k ein Körper, und $A, B \in \mathrm{Mat}_n(k)$ zwei Matrizen, und $k \subset k'$ eine Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass A, B über k konjugiert sind genau dann, wenn sie über k' konjugiert sind.

Aufgabe 2. Sei k ein Körper. Bestimmen Sie die rationale Normalform einer Jordan-Matrix der Form

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(k).$$

Aufgabe 3. Sei R ein Hauptidealring, und M, N, T drei endlich erzeugte R-Moduln. Angenommen, es gilt $M \oplus T \simeq N \oplus T$. Beweisen Sie, dass dann auch $M \simeq N$ gelten muss.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring, M ein R-Modul von endlicher Länge, und $f : M \to M$ eine lineare Abbildung. Wir setzen

$$U = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{Ker}(f^n) \quad \text{und} \quad V = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}(f^n).$$

Beweisen Sie, dass die kanonische Abbildung

$$f : U \oplus V \longrightarrow M, \quad (a, b) \longmapsto a + b$$

bijektiv ist („Fittings Lemma").

Abgabe: Bis Montag, den 09.05.2011 um 8:30 Uhr im Zettelkasten.