Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 11

Übungen zur Kommutativen Algebra & Geometrie

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen. Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : M_1 \to N_1$ und $g : M_4 \to N_4$ gibt so, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

kommutativ wird.

Aufgabe 2. Seien x, y, z drei Unbestimmte, und $K = \mathbb{Q}(x, y, z)$ der Körper der Brüche zum Polynomring $R = \mathbb{Q}[z, y, z]$. Wir betrachten die Matrizen

$$A = \big(x, y, z\big) \in \mathrm{Mat}_{1\times 3}(R) \quad \text{und} \quad A^t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 1}(R).$$

Finden Sie eine explizite Matrix $B \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(R)$ so, dass die Sequenz von Vektorräumen

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{A^t} K^3 \xrightarrow{B} K^3 \xrightarrow{A} K \longrightarrow 0$$

exakt wird.

Aufgabe 3. Beweisen Sie mit dem Zornschen Lemma, dass jeder Vektorraum eine Basis enthält.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum. Für jede offene Teilmenge $U \subset X$ bezeichne $\mathcal{C}(U)$ die Gruppe aller stetigen Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$. Sei nun $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Zeigen Sie, dass die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(U) \xrightarrow{\ r\ } \prod_{i \in I} \mathcal{C}(U_i) \xrightarrow{\ s\ } \prod_{i,j \in I} \mathcal{C}(U_i \cap U_j)$$

exakt ist. Hierbei sind r und s die Abbildungen

$$f \longmapsto (f|_{U_i})_{i \in I} \qquad \text{bzw.} \qquad (f_i)_{i \in I} \longmapsto (f_i|_{U_i \cap U_j} - f_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j \in I}.$$

Dabei bezeichnet beispielsweise $f|_{U_i}$ die Einschränkung einer auf U definierten Funktion f auf die Teilmenge $U_i \subset U$.

Abgabe: Bis Montag, den 02.05.2011 um 8:30 Uhr im Zettelkasten.