Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 09/10

Übungen p-adische Zahlen

Blatt 11

Aufgabe 1. Geben Sie explizit eine Potenzreihe $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in \mathbb{C}_p[[X]]$ an, dessen Newton-Polygon aus nur einem Segement besteht, und dessen Steigung $\mu \in \mathbb{R}$ irrational ist.

Aufgabe 2. Sei $f \in \mathbb{C}_p[[X]]$ eine konvergente Potenzreihe, mit Konvergenzradius $\rho_f > 0$. Zeigen Sie, daß es zu jeder reellen Zahl $0 < r < \rho_f$ eine Faktorisierung $f = P \cdot g$ gibt, wobei $P \in \mathbb{C}_p[X]$ ein Polynom und $g \in \mathbb{C}_p[[X]]$ eine konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $r < \rho_g$ gibt.

Aufgabe 3. Sei $a \in \mathbb{Z}_p$. Wir betrachten die Reihe

$$f = (1+X)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} X^n \in \mathbb{C}_p[[X]],$$

wobei der p-adische Binomialkoeffizient als

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}, \quad a \in \mathbb{Z}_p, n \in \mathbb{N}.$$

definiert wird. Zeigen Sie, daß $\binom{a}{n} \in \mathbb{Z}_p$, und daß somit die Reihe $f = (1+x)^a$ Konvergenzradius $\rho \geq 1$ hat.

Aufgabe 4. Sei $f = \sum a_i X^i \in \mathbb{C}_p$ mit $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$. Wir definieren b als das Maximum der Beträge $|a_n|$, $n \geq 0$. Sei $N \geq 0$ der größte Index mit $|a_N| = b$. Zeigen Sie, daß f genau N Nullstellen $\omega \in \mathbb{C}_p$, $|\omega| \leqslant 1$ hat.

Abgabe: Bis Montag den 25.01. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.