Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 09/10

Übungen p-adische Zahlen

Blatt 5

Aufgabe 1. Sei X ein metrischer Raum und $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge.

(i) Verifizieren Sie, daß die Teilmenge $K \subset X$ abgeschlossen ist.

(ii) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung in einen anderen metrischen Raum Y. Zeigen Sie, daß das Bild $f(K) \subset Y$ ebenfalls kompakt ist.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper mit Absolutbetrag und V, W zwei normierte K-Vektorräume. Zeigen Sie, daß eine lineare Abbildung $f : V \to W$ genau dann stetig ist, wenn es eine reelle Konstante $C > 0$ gibt mit

$$\|f(x)\| \leqslant C\|x\|$$

für alle Vektoren $x \in V$.

Aufgabe 3. Sei K ein ultrametrischer Körper und $r > 0$ eine beliebige reelle Zahl. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$K \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \longmapsto |x|^r$$

ebenfalls ein ultrametrischer Absolutbetrag ist.

Aufgabe 4. Seien $p \neq l$ zwei Primzahlen. Beweisen Sie, daß die beiden Körper $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{Q}_l$ nicht isomorph sind.

Abgabe: Bis Montag den 23.11. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.