Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 09/10

# Übungen p-adische Zahlen

## Blatt 4

**Aufgabe 1.** Sei $a \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl prim zu $p$. Verifizieren Sie, daß es ein $b \in \mathbb{Z}_p$ mit $b^n = a$ gibt.

**Aufgabe 2.** Sei $a \in \mathbb{Q}_p^\times$. Zeigen Sie, daß $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ genau dann gilt, wenn $a^{p-1}$ eine $n$-te Wurzel in $\mathbb{Q}_p$ für unendlich viele natürliche Zahlen $n \geq 1$ besitzt.

**Aufgabe 3.** Beweisen Sie, daß es Körpereinbettungen $\mathbb{Q}_p \subset \mathbb{C}$ geben muß.

**Aufgabe 4.** Sei $X$ ein kompakter ultrametrischer Raum und $a \in X$. Zeigen Sie, daß die Menge der Abstände

$$D = \{d(x,a) \mid x \in X, x \neq a\} \subset \mathbb{R}_{>0}$$

eine diskrete Teilmenge ist. Mit anderen Worten, zu jedem $x \in X$, $x \neq a$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}_{>0}$ so, daß $U \cap D = \{d(x,a)\}$ gilt.

**Abgabe:** Bis Montag den 16.11. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.