

Übungen p -adische Zahlen

Blatt 2

Aufgabe 1. Für welche Primzahlen $3 \leq p \leq 17$ existieren Quadratwurzeln $\pm\sqrt{2}$ als Elemente im Körper \mathbb{Q}_p ?

Aufgabe 2. Berechnen Sie jeweils die ersten vier Ziffern a_0, a_1, a_2, a_3 der Quadratwurzel

$$\pm\sqrt{2} = \sum_{i \geq 0} a_i p^i \in \mathbb{Q}_p$$

für die in Aufgabe 1 gefunden Primzahlen.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß jede p -adische Zahl die Summe einer ganzen p -adischen Zahl und einer rationalen Zahl ist, deren Nenner eine p -Potenz ist:

$$\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p + \mathbb{Z}[1/p].$$

Aufgabe 4. Wir betrachten die abelsche Gruppe $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ aller p -adischen Zahlen modulo den ganzen p -adischen Zahlen, wobei die Verknüpfung durch die Addition geliefert wird. Zeigen Sie, daß die Gruppe $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ eine Vereinigung von endlichen Gruppen ist, deren Ordnungen Potenzen von p sind. Ist die Gruppe $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ selber endlich?

Abgabe: Bis Montag den 2.11. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.