

Übungen p -adische Zahlen

Blatt 1

Aufgabe 1. Berechnen Sie die ersten fünf Ziffern a_0, \dots, a_4 der ganzen p -adischen Zahl

$$\frac{1 + p + p^2}{p - 1} = \sum_{i \geq 0} a_i p^i \in \mathbb{Z}_p,$$

für die Primzahlen $p = 2, 3, 5$.

Aufgabe 2. Sei $a = \sum_{i \geq 0} a_i p^i \in \mathbb{Z}_p$ eine ganze p -adische Zahl. Zeigen Sie, daß a genau dann in der Teilmenge $\{-1, -2, -3, \dots\} \subset \mathbb{Z}_p$ enthalten ist, wenn für fast alle Koeffizienten $a_i = p - 1$ gilt.

Aufgabe 3. Verifizieren Sie, daß die Einheitengruppe $\mathbb{Q}_p^\times = \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ des Körpers der p -adischen Zahlen isomorph zur Gruppe $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p^\times$ ist.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, daß die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ unendlichen Grad hat, also $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}_p) = \infty$.

Abgabe: Bis Montag den 26.10. um 11:00 Uhr in den Zettelkasten.

Leistungspunkte: Bei Bestehen der Prüfung zur Lehrveranstaltung werden 9 Leistungspunkte vergeben. Um zur Prüfung zugelassen zu werden, müssen Sie als Prüfungsvorleistung regelmäßig am Übungsbetrieb teilnehmen und 20% der möglichen Punkte auf den Übungszetteln erreichen. Die Prüfung wird als mündliche Prüfung zum Ende der Vorlesungszeit oder zum Ende des Semesters durchgeführt.