**Aufgabe 1.** Sei $V$ der reelle Vektorraum aller stetigen Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir betrachten die Cosinusfunktion $\cos(x)$ und die Exponentialfunktion $\exp(x)$ als Vektoren in $V$. Zeigen Sie, daß diese beiden Vektoren

$$\cos, \exp \in V$$

linear unabhängig sind.

**Aufgabe 2.** Sei $K$ ein Körper, und $V = \mathrm{Mat}(2, K)$ der $K$-Vektorraum aller $2 \times 2$-Matrizen. Wir betrachten den Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -a & c \\ -b & d \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für die Körper $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_2$, ob der Endomorphismus $f$ diagonalisierbar oder trigonalisierbar ist.

**Aufgabe 3.** Wir definieren

$$D_3 = \begin{pmatrix} -2 & & 1 \\ & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{Q}),$$

und für $n \geq 4$

$$D_n = \begin{pmatrix} -2 & & 1 & & & \\ & -2 & 1 & & & \\ 1 & 1 & -2 & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q}).$$

(i) Berechnen Sie $\det(D_3)$ und $\det(D_4)$ explizit.

(ii) Drücken Sie $\det(D_n)$ für $n \geq 5$ mittels Laplace-Entwicklung durch $\det(D_{n-1})$ und $\det(D_{n-2})$ aus.

(iii) Beweisen Sie $\det(D_n) = (-1)^n 4$ durch vollständige Induktion nach $n \geq 3$.

**Aufgabe 4.** Sei $t$ eine reelle Zahl, und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 1 & t & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R}).$$

(i) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A$ invertierbar?

(ii) Berechnen sie für solche $t$ die inverse Matrix mit der Cramerschen Regel.