Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 07

Übungen zu Algebraische Geometrie II

Blatt 1

Aufgabe 1.* Sei k ein Grundkörper von Charakteristic $p \neq 2$, der $\sqrt{-1}$ enthalte, zum Beispiel $k = \mathbb{C}$. Konstruieren Sie einen Isomorphismus

$$k[T^{\pm 1}] \longrightarrow k[U, V]/(U^2 + V^2 + 1)$$

von k-Algebren.

Aufgabe 2.* Sei k ein Grundkörper wie in Aufgabe 1. Wir betrachten das homogene quadratische Polynom $f = T_0^2 + T_1^2 + T_2^2$ aus dem Polynomring $A = k[T_0, T_1, T_2]$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Das abgeschlossene Unterschema $Y = V_+(f)$ des 2-dimensionalen projektiven Raumes $\mathbb{P}^2 = \operatorname{Proj}(A)$ ist 1-dimensional und regulär.

(ii) Das abgeschlossene Unterschema $X = V(f)$ des 3-dimensionalen affinen Raumes $\mathbb{A}^3 = \operatorname{Spec}(A)$ ist 2-dimensional und nichtregulär.

Aufgabe 3. Sei X eine irreduzible Kurve mit unendlich vielen Punkten. Zeigen Sie, daß dann jedes offene nichtleere Unterschema $U \subset X$ ebenfalls ein irreduzible Kurve ist.

Aufgabe 4. Sei k ein Grundkörper. Wir betrachten die k-Algebra

$$A = k[[U, V]]/(U^2 + V^3)$$

und das k-Schema $X = \mathrm{Spec}(A)$.

(i) Verifizieren Sie, daß X eine integre Kurve mit genau zwei Punkten $X = \{\sigma, \eta\}$ ist, und daß X nicht regulär ist.

(ii) Zeigen Sie, daß der Bruch U/V ganz über A ist, also einer Ganzheitsgleichung $T^n + \lambda_{n-1}T^{n-1} + \ldots + \lambda_0 = 0$ mit Koeffizienten $\lambda_i \in A$ genügt.

(iii) Was ist die Normalisierung von A?

Abgabe: Bis Montag, den 16.4. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Die zwei Aufgaben mit $*$ sind Präsenzaufgaben, die unter Anleitung in der Übung bearbeitet werden sollen. Die übrigen zwei Aufgaben sind Hausaufgaben.